ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 6 | April 1926 | Heft 2

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt.[1]

Von CONSTANTIN WEBER in Duisburg.

Wird durch einen geraden Balken ein Drehmoment übertragen, dessen Größe sich in Achsrichtung allmählich oder sprungweise ändert, so erhält man allgemein Abweichungen von den Spannungen der reinen Drehung, da sich die Verwölbung der Querschnitte ändert, die Längsfasern sich folglich verlängern und verkürzen müssen. Hierdurch werden weitere Spannungen, in erster Linie Längsspannungen, verursacht. Von Wichtigkeit sind diese zusätzlichen Spannungen bei doppelflanschigen Querschnitten; die Untersuchung derselben ist bisher nur für den einfachsten Fall, den I-Querschnitt, gelungen[2].

In vorliegender Arbeit wird das Problem allgemein betrachtet, für den beliebigen doppelflanschigen Querschnitt die Lösung gefunden und in einem Beispiele die Uebereinstimmung mit den bisher nicht aufgeklärten Biegungsversuchen von C. v. Bach mit [-Trägern aus dem Jahre 1909 und 1910[3]) gezeigt.

1. Allgemeine Betrachtung. Die Formänderung bei reiner Drehung besteht in einer Verwindung der Längsfasern zu Schraubenlinien; hierbei kann jede Längsfaser infolge der großen Steigung in erster Annäherung als gerade Drehachse genommen werden. Die Verwindung der Längsfasern und die Schiebungen infolge der Drehungsspannungen verursachen die Verwölbung der Querschnitte durch reine Drehung. Nur der Kreis- und der Kreisringquerschnitt bleiben eben. Die Verwölbung des langen Rechteckes, des Winkelquerschnittes und des I-Querschnittes sind in Abb. 1 bis 3 dargestellt. Die Breitenlinien der einzelnen Streifen, aus denen die Querschnitte bestehen,

[1]) Der Aufsatz entspricht mit geringen Aenderungen dem III. Teile der Dr.-Arbeit des Verfassers.

[2]) S. Timoschenko, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1910, S. 361.

[3]) C. Bach, Versuche über die tatsächliche Widerstandsfähigkeit von Balken mit [-förmigem Querschnitt. Z. d. V. d. I. 1909, S. 1790 u. 1910, S. 382.

stellen sich senkrecht zu den zu Schraubenlinien verwundenen Längsfasern mit geringen Abweichungen in den Streifenenden und Verbindungsstellen. Bei dem doppelflanschigen Querschnitte erfolgt eine weitere wichtige Formänderung: die Mittellinien der Flanschstreifen bleiben gerade und stellen sich senkrecht zu den Längsfasern, die durch die Schnittpunkte dieser Flanschmittellinien mit der Stegmittellinie gehen. Sie bilden im Raume den Winkel ϑh_t.

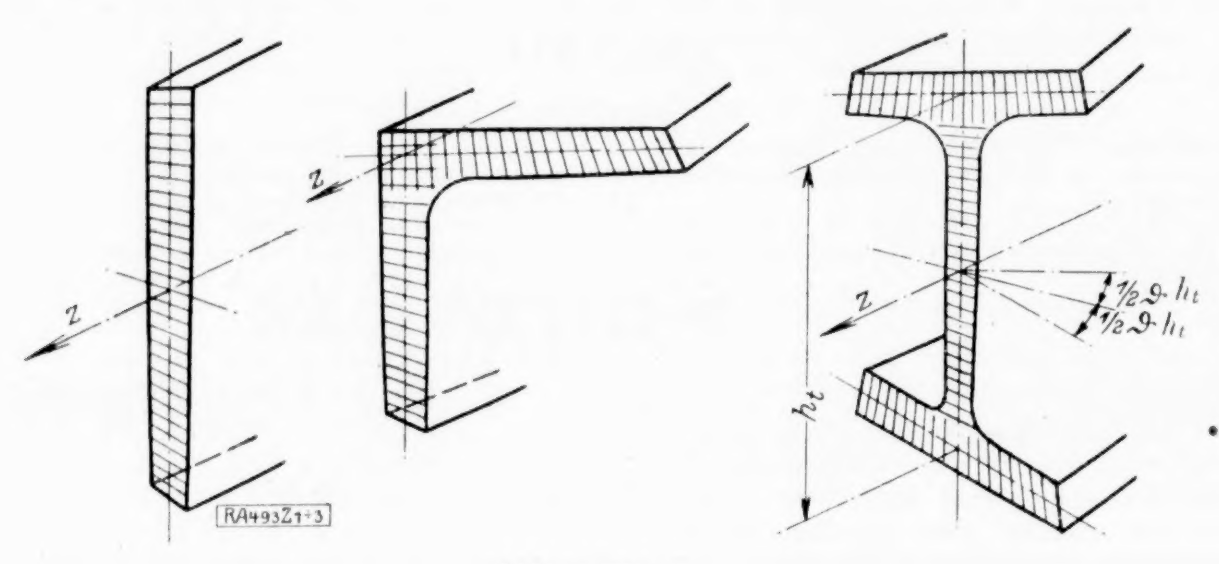


Abb. 1 bis 3.

Wird das Drehmoment in der Mitte des Balkens eingeleitet und je zur Hälfte nach rechts und links, Abb. 4, übertragen, so bleibt der mittlere Querschnitt aus Symmetriegründen eben. Bei Kreis- und Kreisringquerschnitten entspricht dies der Verwölbung des Querschnittes. Die mittleren Querschnitte beider durch reine Drehung verformter Balkenhälften passen zusammen. Es treten hier, wie auch in den späteren Fällen, nur die örtlichen Abweichungen der Spannungen infolge der Einleitung des Drehmomentes auf. Die Längsfasern verwinden sich im linken Balkenteile zu Links-, im rechten zu Rechtsschraubenlinien. Die mittlere Längsfaser bleibt gerade und wird zur Drehachse des Balkens; der Durchbruchspunkt im Querschnitte ist der Drehpunkt desselben.

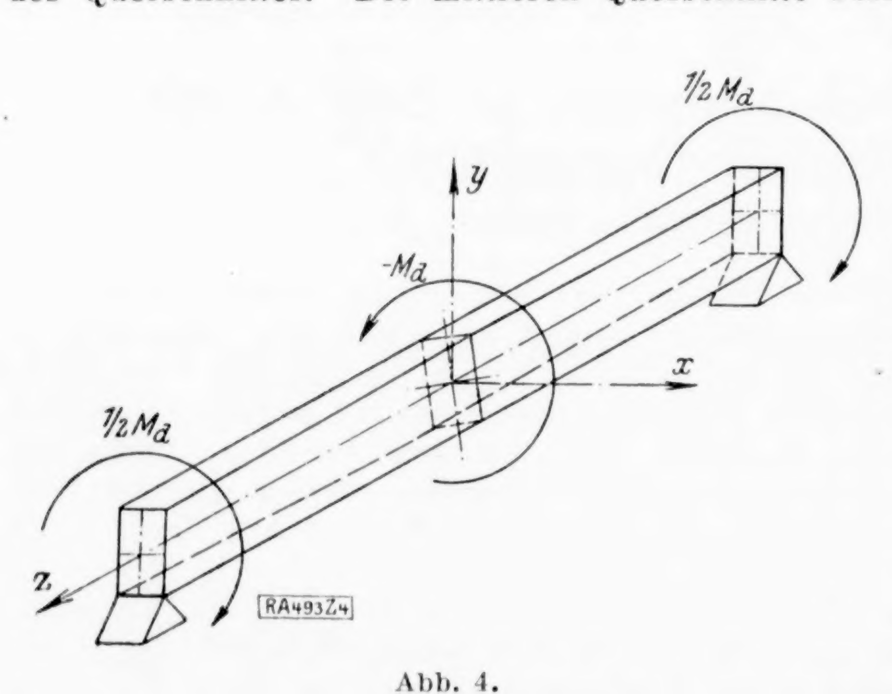


Abb. 4.

Wird der Balken mit beliebigem Querschnitte nach Abb. 4 belastet, so passen bei der Annahme, daß nur die Spannungen der reinen Drehung auftreten, die mittleren Querschnitte beider Balkenhälften allgemein nicht zusammen. Es ist ein weiterer Spannungszustand hinzuzufügen: Der mittlere Endquerschnitt jeder Balkenhälfte ist durch Längsspannungen σ_z zu belasten, die den verwölbten Querschnitt in einen ebenen zurückformen. Diese Längsspannungen klingen mit wachsender Entfernung vom mittleren Querschnitte ab. In einer gewissen Entfernung $z = \pm l_a$ sind sie nicht mehr merkbar; von diesem Querschnitte an bleibt die Verwölbung der reinen Drehung bestehen. Infolge der Aenderung der Spannungen σ_z mit z treten Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} auf; des weiteren können auch die Spannungen σ_x, σ_y und τ_{xy} entstehen, sind jedoch von untergeordneter Bedeutung. Die veränderliche Spannung von σ_z gibt in jeder Faser von $z = 0$ bis $z = l_a$ den Durchschnittswert $\sigma_{za} = \frac{1}{l_a}\int\limits_0^{l_a} \sigma_z\, dz$. In jedem Querschnitt dürfen die Spannungen weder eine Längskraft, noch ein biegendes Moment um die x- oder y-Achse geben. Dasselbe gilt auch für die Spannungen σ_{za}. Die Längsfasern verlängern

sich um den Betrag $\zeta = \frac{\sigma_{za}\, l_a}{E}$; hierbei ist der Einfluß von σ_x und σ_y infolge der Querzusammenziehung vernachlässigt. Durch diese Längenänderungen werden die mittleren Endpunkte der Längsfasern in die Ausgleichebene des verwölbten Querschnittes gebracht. Die Ausgleichebene hat folglich eine bestimmte Lage zu dem durch reine Drehung verwölbten Querschnitt: Läßt man auf jeden Punkt des Querschnittes eine Spannung wirken, die verhältnisgleich zum Abstande beider Flächen ist, so darf hierdurch weder eine Längskraft, noch ein biegendes Moment entstehen.

Für $z > l_a$ werden die Längsfasern infolge der reinen Drehung zu Schraubenlinien verwunden, die in erster Annäherung Gerade mit verschiedener Neigung sind. Eine dieser Längsfasern steht senkrecht zur Ausgleichebene und bildet mit der eigenen Verlängerung für $z < -l_a$ eine gerade Linie. Dieses ist die Drehachse, die durch den Drehpunkt des Querschnittes geht. Alle übrigen Längsfasern haben zwischen $z = -l_a$ und $+l_a$ einen abgerundeten Knick und verwinden sich in jeder Balkenhälfte im entgegengesetzten Sinne. Ist die Verwölbung durch reine Drehung bekannt, so können hiernach die Ausgleichebene, der Drehpunkt und die Drehachse gefunden werden.

Bei einem aus zwei geraden Streifen bestehenden Querschnitte (z. B. T- oder Winkelquerschnitt) fällt der Drehpunkt fast genau mit dem Schnittpunkte der Streifenmittellinien zusammen. Legt man senkrecht zur Längsfaser durch diesen Punkt die Ausgleichebene, so liegen die Streifenmittellinien in dieser Ebene, während die anderen Punkte des verwölbten Querschnittes z. T. überstehen, z. T. dieselbe nicht erreichen.

Beim I-Querschnitte fällt der Drehpunkt mit dem Mittelpunkte zusammen. Die gerade Stegmittellinie liegt in der Ausgleichebene, die Flanschmittellinien bilden mit dieser die Winkel $\pm {}^1/_2\, \vartheta h_t$. Bei diesem Querschnitte müssen in der Mitte des nach Abb. 4 belasteten Balkens ganz bedeutende zusätzliche Längsspannungen (Biegungsspannungen in den Flanschen) auftreten. Dieses gilt auch für andere doppelflanschige Querschnitte, die im weiteren eingehender untersucht werden.

2. Uebertragung des Drehmomentes durch Flanschquerkräfte. Der nach Abb. 5 belastete Balken sei im Nullquerschnitte so eingespannt, daß der doppelflanschige Endquerschnitt eben bleibt. Im Endquerschnitt $z = l$ wird ein Drehmoment eingeleitet, das sich von $z = l$ bis $z = O$ infolge weiterer Kräftepaare ändert. Im oberen Flansche entsteht hierdurch, Abb. 6, eine nach rechts, im unteren Flansche eine nach links gerichtete, mit z sich ändernde Querkraft. Die Flansche werden verbogen. Man erhält

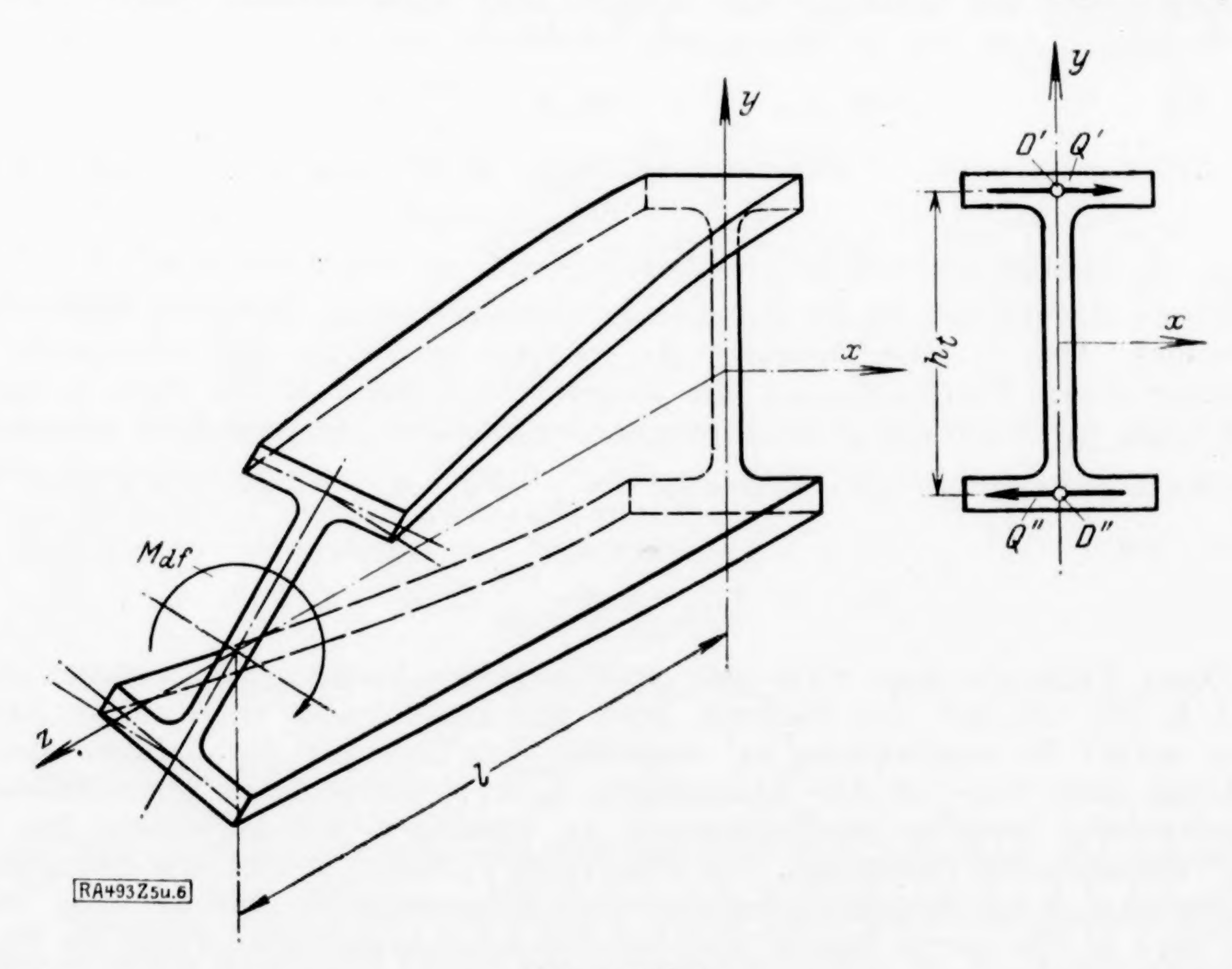
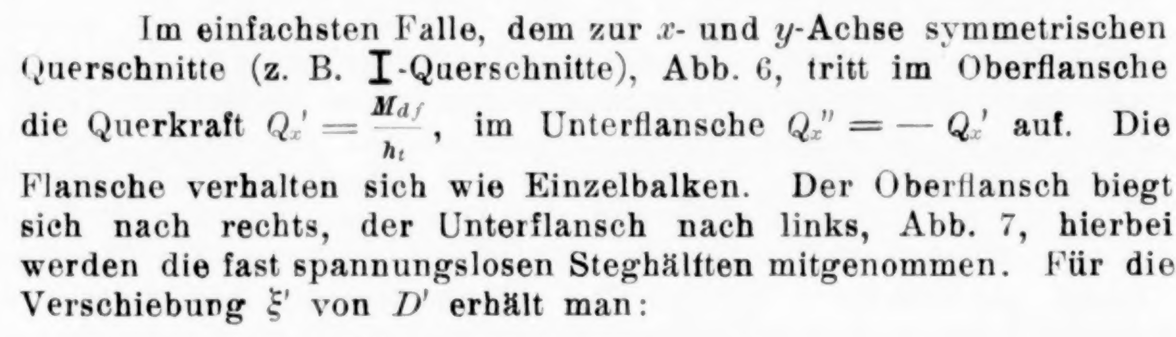


Abb. 5 und 6.

eine Uebertragung des Drehmomentes M_{df} durch Flanschquerkräfte. Die Uebertragung eines Teiles des Drehmomentes durch reine Drehung, die ebenfalls auftritt, sobald die Querschnittsflächen des Ober- und Unterflansches sich gegenseitig schräg stellen, werde fürs erste vernachlässigt.

Für die doppelflanschigen Querschnitte ist im weiteren das Koordinatensystem einheitlich so gelegt, daß die y-Achse mit der Stegmittellinie zusammenfällt und die x-Achse senkrecht hierzu durch den Querschnittsschwerpunkt S geht. Durch die x-Achse wird der Querschnitt und entsprechend auch der Balken in Ober- und Unterteil zerlegt. Für den Oberteil gelten die Bezeichnungen: Fläche F', Koordinaten des Schwerpunktes x_s' und y_s', statistisches Moment für die y-Achse $F'x_s'$, Trägheitsmoment für die x-Achse J_x', für die y-Achse J_y', Zentrifugalmoment für beide Achsen J_{xy}'. Der Drehpunkt des oberen Teiles D' ist der Schnittpunkt der Steg- und der Flanschmittellinie. Für den unteren Teil gelten dieselben Bezeichnungen zweimal gestrichen (z. B. J_y''), für den ganzen Querschnitt ohne Strichzeiger.

Der Abstand der Drehmittelpunkte D' und D'' — die theoretische Querschnittshöhe — ist gleich h_t.



Im einfachsten Falle, dem zur x- und y-Achse symmetrischen Querschnitte (z. B. I-Querschnitte), Abb. 6, tritt im Oberflansche die Querkraft $Q_x' = \frac{M_{df}}{h_t}$, im Unterflansche $Q_x'' = -Q_x'$ auf. Die Flansche verhalten sich wie Einzelbalken. Der Oberflansch biegt sich nach rechts, der Unterflansch nach links, Abb. 7, hierbei werden die fast spannungslosen Steghälften mitgenommen. Für die Verschiebung ξ' von D' erhält man:

$$\frac{d^3 \xi'}{d z^3} = -\frac{Q_x'}{J_y' E} = -\frac{M_{df}}{{}^1/_2 h_t \cdot J_y \cdot E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$



Abb. 7.

Für D'' gilt eine entsprechende Gleichung. Die Querschnittsteile drehen sich hierbei um D' und D'', bis der Steg in der Mitte wieder verbunden ist. Man erhält eine Drehung des Balkens um die Schwerpunkt-Längsfaser mit dem veränderlichen Verdrehungswinkel

$$\vartheta = \frac{1}{{}^1/_2 h_t} \cdot \frac{d \xi'}{d z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Gl. (1) und (2) geben

$$M_{df} = -\frac{d^2 \vartheta}{d z^2} E \left({}^1/_2 h_t\right)^2 J_{df} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Für die Spannungen erhält man im Ober- bzw. Unterflansche

$$\frac{\partial \sigma_z'}{\partial z} = \frac{Q_x'}{J_y} x = \frac{M_{df}}{{}^1/_2 h_t J_y} x, \qquad \frac{\partial \sigma_z''}{\partial z} = \frac{Q_x''}{J_y} x = -\frac{M_{df}}{{}^1/_2 h_t J_y} x \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Etwas verwickelter ist die Behandlung des allgemeinen Falles des doppelflanschigen Querschnittes, Abb. 8. Die Drehung des Balkens erfolgt um den Drehpunkt $D(x_d, y_d)$ des Querschnittes. Hierdurch wird die theoretische Höhe h_t in die Teile h_t' und h_t'' zerlegt. Infolge der Verdrehnng $\vartheta\, dz$ zweier benachbarter Querschnitte verschieben sich gegenseitig die Stegmittellinien senkrecht um $\frac{\partial \eta}{\partial z} dz = x_d \vartheta\, dz$ und die Punkte D' und D'' wagerecht um

$$\frac{\partial \xi'}{\partial z} dz = h_t' \vartheta\, dz \quad \text{und} \quad \frac{\partial \xi''}{\partial z} dz = -h_t'' \vartheta\, dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Diese Formänderung wird nun aus folgenden Einzelformänderungen zusammengesetzt: 1. Der Oberteil des Balkens wird um die y-Achse als Nullinie nach rechts gebogen, wobei die Spannungen σ_{z1}' entstehen, der Unterteil des Balkens ebenfalls um die y-Achse nach links mit den Spannungen σ_{z1}''. 2. Ueber beide Querschnittsteile wird eine gleichmäßig verteilte Längsspannung σ_{z2} überlagert zur Aufhebung der durch σ_{z1}' und σ_{z1}'' entstehenden Längskraft. 3) Ober- und Unterteil werden um den gleichen Verdrehungswinkel ϑ um ihre Drehpunkte D' und D'' gedreht, so daß der Steg wieder verbunden ist. 4) Der ganze Balken wird um die x-Achse gebogen, wobei die Spannungen σ_{z3} entstehen.

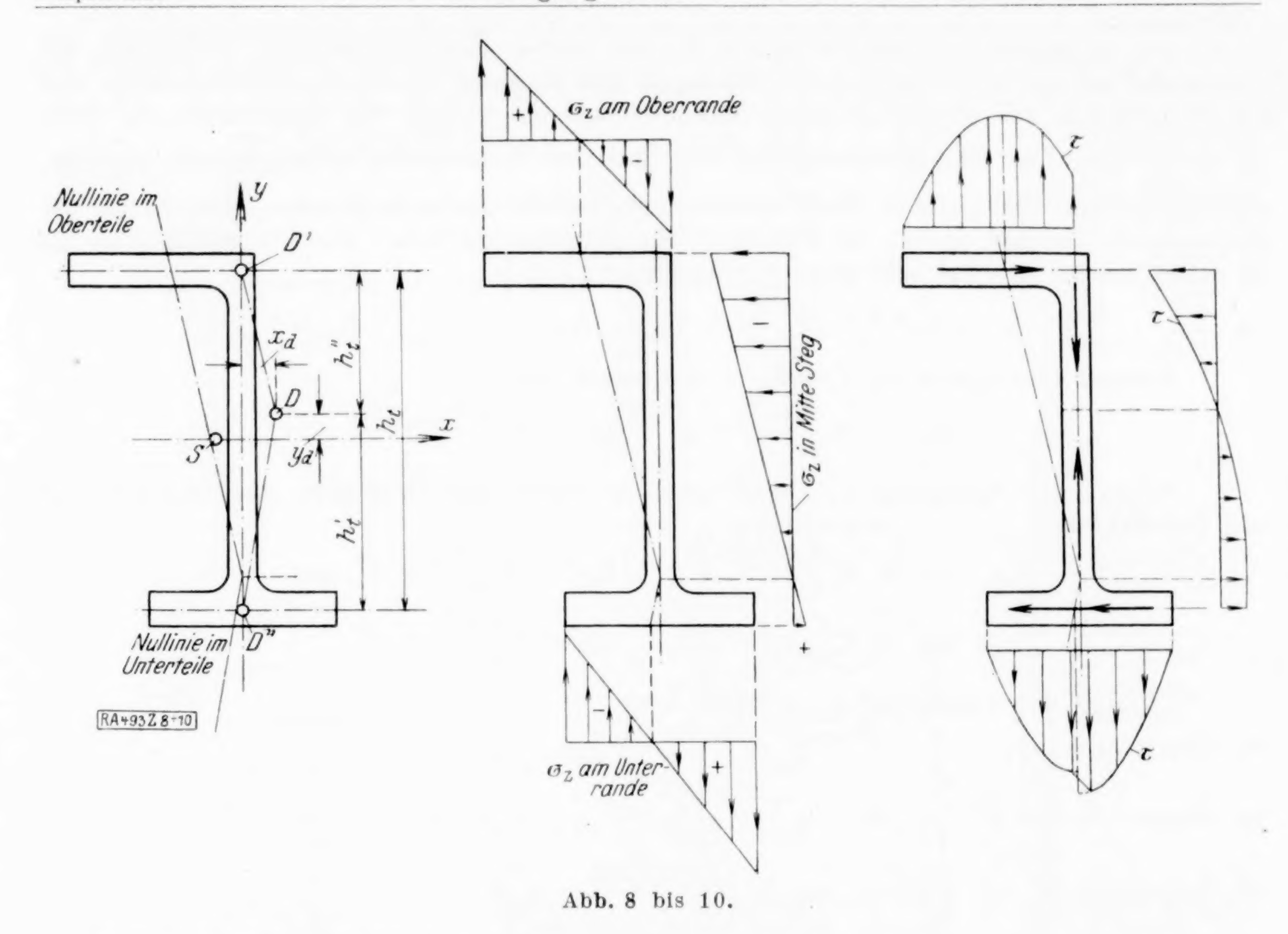


Abb. 8 bis 10.

Durch die Formänderung 1 erhält man im Oberteile

$$\frac{\partial^3 \xi_1'}{\partial z^3} = -\frac{Q_{x1}'}{J_y' E'}, \qquad \frac{\partial \vartheta_{z1}'}{\partial z} = \frac{Q_{x1}'}{J_y'} x = -E \frac{\partial^3 \xi_1'}{\partial z^3} x = -E \frac{d^2 \vartheta}{d z^2} h_t' x$$

und für den Unterteil entsprechende Gleichungen. Im Oberteile des Balkenstückes dz wirken auf die Stirnflächen verschieden große Längskräfte Z_1' mit dem Zuwachs

$$d Z_1' = \int\limits_{(F)} \frac{\partial \sigma_{z1}'}{\partial z} dz\, df = -E \frac{d^2 \vartheta}{d z^2} dz\, h_t' F' x_s',$$

entsprechend für den Unterteil $d Z_1'' = E \frac{d^2 \vartheta}{d z^2} dz\, h_t'' F'' x_s''$.

Da durch die Spannungen σ_{z2} der Formänderung 2 die Längskräfte Z_1' und Z_1'' aufgehoben werden, so wird

$$\frac{\partial \sigma_{z2}}{\partial z} = E \frac{d^2 \vartheta}{d z^2} c_t \quad \text{mit} \quad c_t = \frac{h_t' F' x_s' - h_t'' F'' x_s''}{F} \quad \ldots \ldots \quad (6).$$

Durch die Formänderung 3 werden beide Balkenteile um den gleichen Winkel gedreht, die Trennungsstellen des Steges berühren sich wieder und haben dieselbe Spannung σ_{z2}, auch bleibt die Stegmittellinie gerade.

Die Biegung um die x-Achse der Formänderung 4 gibt

$$\frac{\partial \sigma_{z3}}{\partial z} = -E \frac{d^2 \vartheta}{d z^2} x_d y.$$

Durch Ueberlagerung der Spannungen σ_{z1}, σ_{z2} und σ_{z3} erhält man bei gleichzeitiger Integration:

$$\sigma_z' = -E \frac{d \vartheta}{d z} (h_t' x + x_d y - c_t), \qquad \sigma_z'' = -E \frac{d \vartheta}{d z} (h_t'' x + x_d y - c_t) \quad . \quad . \quad (7).$$

Die Nullinie liegt im Oberteile parallel zu $D' D$ und schneidet die y-Achse im Punkte $y = \frac{c_t}{x_d}$; die Nullinie des Unterteiles geht durch denselben Punkt parallel zu $D D''$. Für die y Achse erhält man nach beiden Gleichungen dieselben Spannungen (Mittelwerte der Stegspannungen).

Die Querkräfte in den einzelnen Teilen findet man in ähnlicher Weise wie die Querkräfte infolge der Hauptschubspannungen bei Biegung durch eine Querkraft[1]). Auf die Stirnflächen des Oberteiles eines Balkenstückes dz wirken die Spannungen σ_{z1}' bzw. $\sigma_{z1}' + \frac{\partial \sigma_z'}{\partial z} dz$. Der Spannungszuwachs ruft, auf den Koordinaten-Anfangspunkt bezogen, ein Moment um die y-Achse und ein Moment um die x-Achse hervor, die durch die Momente $Q_{x1}'\,dz$ und $Q_{y1}'\,dz$ im Gleichgewicht gehalten werden. Hieraus erhält man die im Oberteile infolge σ_{z1}' auftretenden Querkräfte

$$Q_{x1}' = -E \frac{d^2 \vartheta}{d z^2} \cdot J_y' h_t', \qquad Q_{y1}' = -E \frac{d^2 \vartheta}{d z^2} \cdot J_{xy}' h_t'.$$

Ebenso erhält man im Unterteile die Querkräfte

$$Q_{x1}'' = E \frac{d^2 \vartheta}{d z^2} J_y'' h_t'', \qquad Q_{y1}'' = E \frac{d^2 \vartheta}{d z^2} J_{xy}'' h_t''.$$

Infolge der Spannung σ_{z2} erhält man im Ober- und Unterteile des Querschnittes die Querkräfte

$$Q_{x2}' = E \frac{d^2 \vartheta}{d z^2} c_t x_s' F', \qquad Q_{y2}' = E \frac{d^2 \vartheta}{d z^2} c_t y_s' F',$$

$$Q_{x2}'' = E \frac{d^2 \vartheta}{d z^2} c_t x_s'' F'', \qquad Q_{y2}'' = E \frac{d^2 \vartheta}{d z^2} c_t y_s'' F''.$$

Infolge der Spannungen σ_{z3} erhält man

im Oberflansche $$Q_{x3}' = -E \frac{d^2 \vartheta}{d z^2} x_d J_{xy}',$$

im Stege $$Q_{y3} = -E \frac{d^2 \vartheta}{d z^2} x_d J_x,$$

im Unterflansche $$Q_{x3}'' = -E \frac{d^2 \vartheta}{d z^2} x_d J_{xy}''.$$

Da durch die Querkräfte nur das Drehmoment M_{df} übertragen wird, so ist

$$Q_{x1}' + Q_{x1}'' + Q_{x2}' + Q_{x2}'' + Q_{x3}' + Q_{x3}'' = O, \qquad Q_{y1}' + Q_{y1}'' + Q_{y2}' + Q_{y2}'' + Q_{y3} = O.$$

Hieraus

$$h_t' (J_y' - F' x_s' x_s) - h_t'' (J_y'' - F'' x_s'' x_s) + x_d J_{xy} = O, \qquad h_t' J_{xy}' - h_t'' J_{xy}'' + x_d J_x = O.$$

Hierzu kommt die Gleichung $h_t' + h_t'' = h_t$. Aus diesen drei Gleichungen lassen sich x_d, h_t' und h_t'' bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} x_d &= h_t \frac{J_y' J_{xy}'' - J_y'' J_{xy}' - x_s (J_{xy}'' F' x_s' - J_{xy}' F'' x_s'')}{J_x J_y - J_{xy}^2 - J_x x_s^2 F} \\ h_t' &= h_t \frac{J_y'' J_x - J_{xy}'' J_{xy} - J_x x_s F'' x_s''}{J_x J_y - J_{xy}^2 - J_x x_s^2 F} \\ h_t'' &= h_t \frac{J_y' J_x - J_{xy}' J_{xy} - J_x x_s F' x_s'}{J_x J_y - J_{xy}^2 - J_x x_s^2 F} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Nach Gl. (6) läßt sich hieraus c_t bestimmen[2]). Das übertragene Drehmoment wird

$$M_{df} = (Q_{x1}' + Q_{x2}' + Q_{x3}') h_t$$

$$= -E \frac{d^2 \vartheta}{d z^2} (1/2\, h_t)^2 \frac{4 \cdot \left\{ J_x J_y' J_y'' - J_y'' J_{xy}'^2 - J_y' J_{xy}''^2 - \frac{J_x}{F} (J_y' F''^2 x_s^2 + J_y'' F'^2 x_s'^2) + \frac{1}{F} (J_{xy}'' F' x_s' - J_{xy}' F'' x_s'') \right\}}{J_x J_y - J_{xy}^2 - J_x x_s^2 F_s} \quad (9).$$

Der Bruch im letzten Ausdrucke ist von gleicher Abmessung wie J_x (cm^4) und wird mit J_{df} bezeichnet. Die Größe $(1/2\, h_t)^2 J_{df}$ ist der **Verwindungswiderstand des doppelflanschigen Querschnittes.**

Die Gleichungen x_d, h_t', h_t'', c_t, J_{df}, für die Spannungen und für das Moment M_{df} vereinfachen sich für bestimmte Sonderfälle:

---

[1]) Siehe diese Zeitschrift Bd. 4, 1924, S. 345.

[2]) Es sei hier bemerkt, daß bei der Bestimmung von x_d, h_t' und h_t'' durch die Formänderung 3 (durch das Drehen um D' und D'') von dem unter 1. angegebenen allgemeinen Verfahren Gebrauch gemacht worden ist.

1. Der Querschnitt ist zur x- und zur y-Achse symmetrisch, Abb. 7 (**I**-Querschnitt):

$$x_d = O, \qquad h_t' = h_t'' = {}^1/_2\, h_t, \qquad c_t = O, \qquad J_{df} = J_y, \qquad \sigma_t' = -E\frac{d\vartheta}{dz}\,{}^1/_2\, h_t\, x,$$

$$\sigma_t'' = E\frac{d\vartheta}{dz}\cdot{}^1/_2\, h_t\, x, \qquad M_{df} = -E\frac{d^2\vartheta}{dz^2}({}^1/_2\, h_t)^2\, J_y.$$

Der obere und der untere Balkenteil biegen sich in entgegengesetzter Richtung um die y-Achse.

2. Der Querschnitt ist zur y-Achse symmetrisch, Abb. 11 (Schienenquerschnitt):

$$x_d = O, \qquad h_t' = \frac{J_y''}{J_y}\, h_t, \qquad h_t'' = \frac{J_y'}{J_y}\, h_t, \qquad c_t = O, \qquad J_{df} = 4\,\frac{J_y' J''_y}{J_y} \qquad \sigma_z' = -E\frac{d\vartheta}{dz}\cdot\frac{J_y''}{J_y}\, h_t\, x,$$

$$\sigma_z'' = E\frac{d\vartheta}{dz}\cdot\frac{J_y'}{J_y}\, h_t\, x, \qquad M_{df} = -E\frac{d^2\vartheta}{dz^2}({}^1/_2\, h_t)^2\,\frac{4\, J_y'\, J_y''}{J_y}.$$

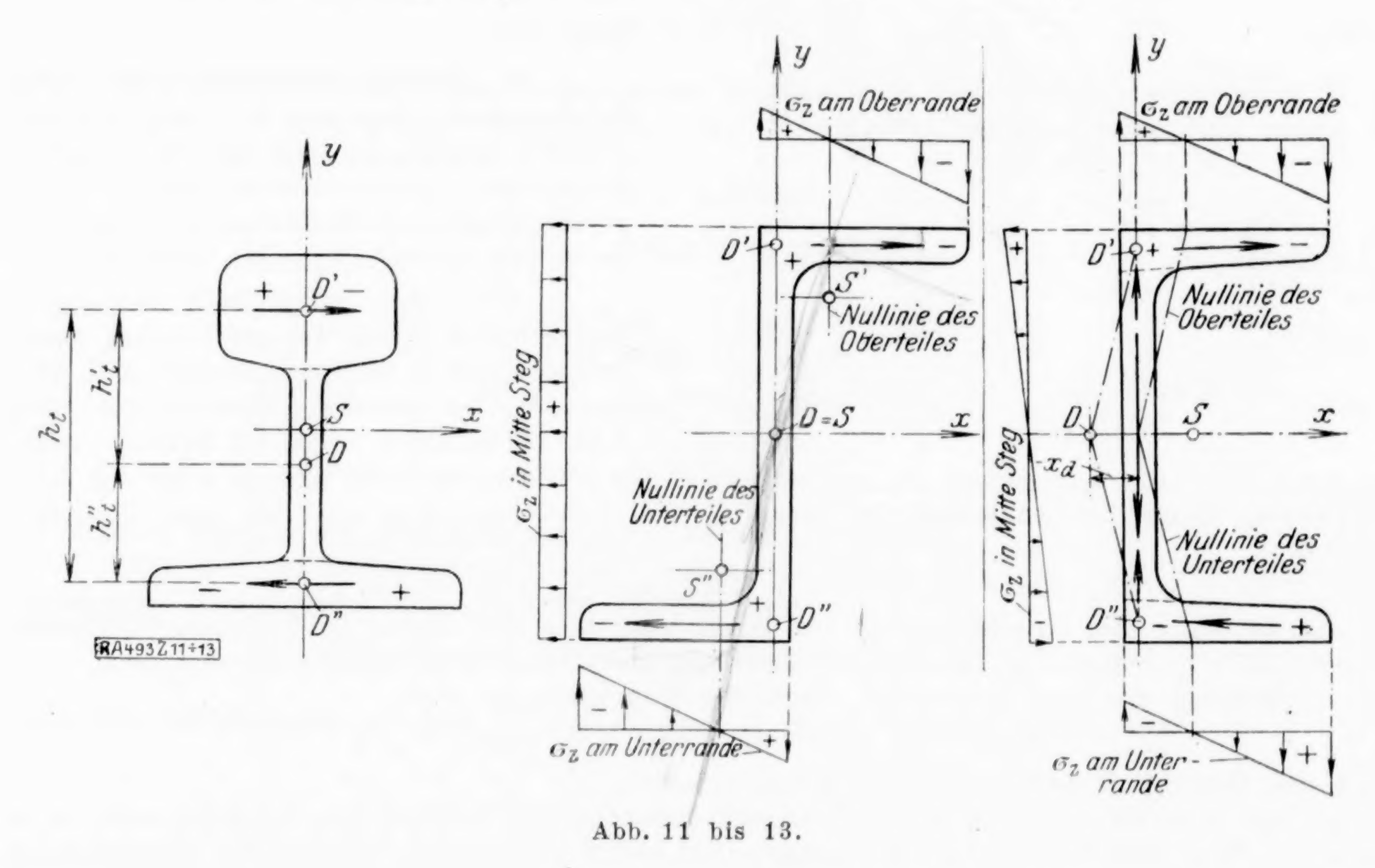


Abb. 11 bis 13.

Der obere und der untere Balkenteil biegen sich verschieden stark um die y-Achse in entgegengesetzer Richtung; der Drehpunkt liegt auf der y-Achse und fällt mit dem Querkraftmittelpunkte zusammen.

3. Der Querschnitt ist punktsymmetrisch, Abb. 12 (**Z**-Querschnitt):

$$x_d = O, \qquad h_t' = h_t'' = {}^1/_2\, h_t, \qquad c_t = {}^1/_2\, h_t\, x_s', \qquad J_{df} = J_y - F\, x_s'^2,$$

$$\sigma_z' = -E\frac{d\vartheta}{dz}\cdot{}^1/_2\, h_t\,(x - x_s'), \qquad \sigma_z'' = E\frac{d\vartheta}{dz}\,{}^1/_2\, h_t\,(x + x_s'),$$

$$M_{df} = -E\frac{d^2\vartheta}{dz^2}({}^1/_2\, h_t)^2\,(J_y - F\, x_s'^2).$$

Die Balkenteile biegen sich in entgegengesetzter Richtung um ihre zur y-Achse parallelen Schwerachsen.

4. Der Querschnitt ist zur x-Achse symmetrisch, Abb. 13 (**[**-Querschnitt).

$$x_d = -\frac{J_{xy}'}{J_x}\, h_t, \qquad h_t' = h_t'' = {}^1/_2\, h_t, \qquad c_t = O, \qquad J_{df} = J_y - 4\,\frac{J_{xy}'^2}{J_x}$$

$$\sigma_z' = -E\frac{d\vartheta}{dz}\cdot{}^1/_2\, h_t\left(x - \frac{2\, J_{xy}'}{J_x}\, y\right), \qquad \sigma_z'' = E\frac{d\vartheta}{dz}\cdot{}^1/_2\, h_t\left(x + \frac{2\, J_{xy}'}{J_x}\, y\right),$$

$$M_{df} = -E\frac{d^2\vartheta}{dz^2}({}^1/_2\, h_t)^2\left(J_y - 4\,\frac{J_{xy}'^2}{J_x}\right).$$

Man erhält im Ober- und Unterteile schräge, zu DD' und DD'' parallele Nulllinien, die durch den Stegmittelpunkt gehen. Der Drehpunkt D fällt auch hier mit dem Querkraftmittelpunkt zusammen.

Ist für den doppelflanschigen Querschnitt das Moment M_{df} bekannt, so kann $\frac{d^2\vartheta}{dz^2}$ und durch Integration bei Berücksichtigung der Endbedingungen $\frac{d\vartheta}{dz}$, ϑ und die Spannungen σ_z gefunden werden. Auch die Schubspannungen lassen sich auf ähnliche Weise wie die Hauptschubspannungen bestimmen. Besteht der Querschnitt aus langen Rechtecken, so erhält man eine geradlinige oder parabolische Verteilung. Für den allgemeinen Fall sind die Normal- und Schubspannungen in Abb. 9 und 10 dargestellt.

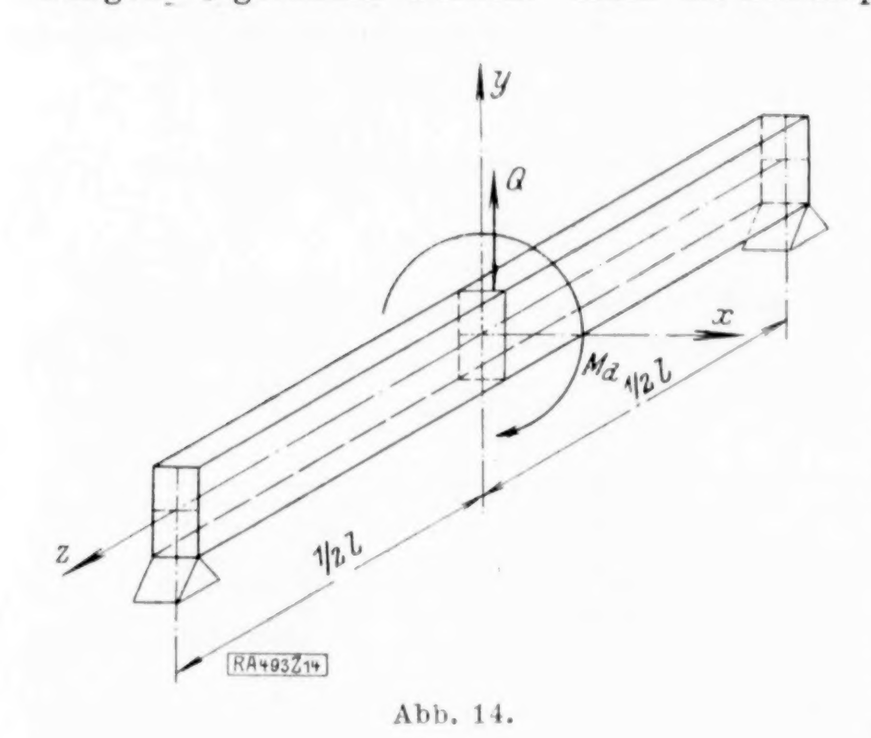


Abb. 14.

3. Querkraftmittelpunkt und Drehpunkt. Bei dem L- und T-Querschnitte sowohl als auch bei den doppelflanschigen Querschnitten fielen Drehpunkt und Querkraftmittelpunkt zusammen. Es werde dieses allgemein bewiesen:

Wird der Balken mit beliebigem Querschnitte durch die zur z-Achse senkrechte Kraft Q und das drehende Kräftepaar M_d im gleichen Querschnitte nach Abb. 14 belastet, so ist die äußere Arbeit, falls erst die Kraft Q von null bis zum Endwerte, dann bei unveränderter Kraft Q das Kräftepaar von null bis zum Endwerte wächst

$$A_a = {}^1/_2\, Q^2\, \eta_{Q=1} + Q\, M_d\, \eta_{M=1} + {}^1/_2\, M_d{}^2\, \Psi_{M=1}.$$

Hierin ist $\eta_{Q=1}$ die Durchbiegung des Angriffspunktes der Kraft in Richtung derselben infolge $Q = 1$, $\Psi_{M=1}$ die Verdrehung des Angriffsquerschnittes infolge $M_d = 1$ usw.

Wächst erst das Kräftepaar, dann die Querkraft, so wird

$$A_a = {}^1/_2\, Q^2\, \eta_{Q=1} + Q\, M_d\, \Psi_{Q=1} + {}^1/_2\, M_d{}^2\, \Psi_{M=1}.$$

Aus der Gleichheit der Arbeiten folgt $\eta_{M=1} = \Psi_{Q=1}$.

Ist nun die Verdrehung des Angriffsquerschnittes infolge $Q = 1$ gleich null, d. h. geht die Kraft durch den Querkraftmittelpunkt des Querschnittes, so wird die Verschiebung desselben Punktes in Richtung der Kraft infolge des Momentes $M_d = 1$ ebenfalls gleich null. Dieses gilt für jede Kraftrichtung. Der Punkt wird zum Drehpunkte, der folglich mit dem Querkraftmittelpunkte zusammenfällt.

Da der Drehpunkt durch die Verwölbung des Querschnittes durch reine Drehung, der Querkraftmittelpunkt hingegen durch die Hauptschubspannungen bestimmt ist, so erhält man somit zwischen diesen Formänderungs- bzw. Spannungszuständen einen inneren Zusammenhang, der von vornherein nicht vorauszusehen war[1]).

4. Zusammengesetzte Uebertragung des Drehmomentes. Im allgemeinen wird das Drehmoment M_d z. T. durch reine Drehung (M_{dr}), z. T. durch Flanschquerkräfte (M_{df}) übertragen. Hierbei werden im Balkenteile mit unveränderlichem M_d die Werte von M_{dr} und M_{df} veränderlich. Bei der weiteren Untersuchung bleiben die Vorgänge infolge der Umwandlung von M_{dr} in M_{df} unberücksichtigt, ebenfalls die Formänderung der Schubspannungen infolge der Flanschquerkräfte und der Einfluß der Art der Uebertragung der äußeren Drehmomente auf den Balken[2]). Berücksichtigt werden also nur die Gleichgewichtsbedingungen für den ganzen Querschnitt, die Biegung der Flansche mit anschließenden Stegteilen und die Drehung des Balkens.

[1]) Vielleicht ist es möglich, diesen Zusammenhang auch aus dem Aufbaue der allgemeinen Lösungen beider Probleme herzuleiten.

[2]) In einem späteren Aufsatze werde ich für den I-Querschnitt den Einfluß der Umwandlung von M_{df} in M_{dr} zeigen und das längsgeschlitzte, dünne Rohr untersuchen.

Die Gleichgewichtsbedingung gibt

$$M_d = M_{df} + M_{dr} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Für jeden Querschnitt erhält man einen anderen verhältnismäßigen Verdrehungswinkel ϑ, von dem M_{dr}, entsprechend der Drehungslehre und M_{df}, entsprechend **2** dieses Aufsatzes, abhängen:

$$M_{dr} = G\,\vartheta\,J_{dr} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

$$M_{df} = -E\,\frac{d^2\,\vartheta}{d\,z^2}\left(\frac{1}{2}\,h_t\right)^2 J_{df} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Setzt man beide Werte in Gl. 10 ein, so erhält man die Differentialgleichung für ϑ

$$M_d = G\,\vartheta\,J_{dr} - E\,\frac{d^2\,\vartheta}{d\,z^2}\left(\frac{1}{2}\,h_t\right)^2 J_{df} = G\,J_{dr}\left(\vartheta - a^2\,\frac{d^2\,\vartheta}{d\,z^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

mit

$$a = {}^1/_2\,h_t\,\sqrt{\frac{E}{G}\cdot\frac{J_{df}}{J_{dr}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Wird bei geraden Balken das Drehmoment in einzelnen Querschnitten eingeleitet, so ist in den dazwischen liegenden Balkenteilen M_d unveränderlich; für diesen Fall werde die Lösung der Gl. 13 angegeben:

$$M_d = \text{konstant},$$

$$\vartheta = \frac{M_d}{G\,J_{dr}}\left(1 - A\,\mathfrak{Cof}\,\frac{z}{a} - B\,\mathfrak{Sin}\,\frac{z}{a}\right) = \frac{M_{dr}}{G\,J_{dr}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

$$\frac{d\,\vartheta}{d\,z} = -\frac{M_d\,a}{E\,({}^1/_2\,h_t)^2\,J_{df}}\left(A\,\mathfrak{Sin}\,\frac{z}{a} + B\,\mathfrak{Cof}\,\frac{z}{a}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

$$\frac{d^2\,\vartheta}{d\,z^2} = -\frac{M_d}{E\,({}^1/_2\,h_t)^2\,J_{df}}\left(A\,\mathfrak{Cof}\,\frac{z}{a} + B\,\mathfrak{Sin}\,\frac{z}{a}\right) = -\frac{M_{df}}{E\,({}^1/_2\,h_t)^2\,J_{df}} \quad . \quad . \quad (17).$$

Die Beiwerte A und B sind aus den Endbedingungen zu bestimmen. Ist $\frac{d\,\vartheta}{d\,z}$ gefunden, so können nach **2** die Normalspannungen berechnet werden.

Für den im Nullquerschnitte vollkommen eingespannten, im Endquerschnitte $z = l$ durch ein Drehmoment M_d belasteten Balken wird

$$\text{für} \quad z = 0 \ldots \vartheta = 0\,, \qquad \text{für} \quad z = l \ldots \frac{d\,\vartheta}{d\,z} = 0.$$

Aus den Gleichungen 15 und 16 sind A und B zu bestimmen; Gl. 17 gibt;

$$\vartheta = \frac{M_d}{G\,J_{dr}}\left(1 - \frac{\mathfrak{Cof}\,\frac{l-z}{a}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{l}{a}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Das Moment M_{df} nimmt vom Werte $(M_{df})_{\max} = M_d$ am Einspannquerschnitte bis zum freien Ende allmählich ab und ist für $z = l$ nur noch gleich $\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\frac{l}{a}}\,M_d$.

Hierbei fällt der die Größe der Spannungen bestimmende Ausdruck $E\,\frac{d\,\vartheta}{d\,z}$ vom Werte

$$\left(E\,\frac{d\,\vartheta}{d\,z}\right)_{\max} = \frac{M_d\,a}{({}^1/_2\,h_t)^2\,J_{df}}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{l}{a}$$

bis auf null.

Ist der Bruch $\frac{l}{a}$ sehr gering, (kurzer Balken, großer Verwindungswiderstand, geringer Drillungswiderstand), so wird

$$\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\frac{l}{a}} \sim 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{Tg}\,\frac{l}{a} \sim \frac{l}{a}.$$

Das Moment M_{df} bleibt fast unveränderlich. Man erhält eine Uebertragung des Momentes hauptsächlich durch Flanschquerkräfte; für die Spannungsberechnung erhält man den Ausdruck

$$\left(E\,\frac{d\,\vartheta}{d\,z}\right)_{\max} \sim \frac{M_d\,l}{({}^1/_2\,h_t)^2\,J_{df}}.$$

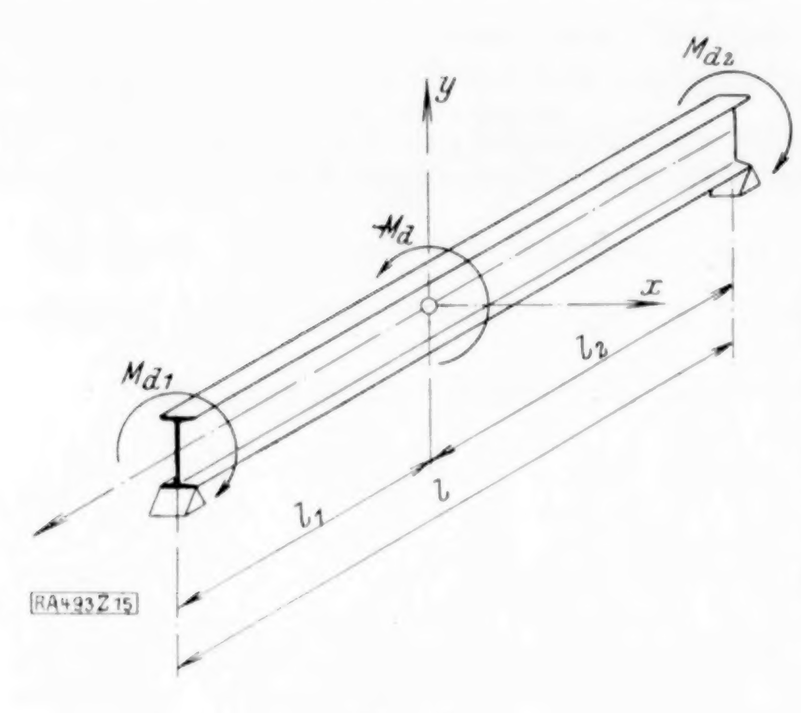


Abb. 15.

Für große Werte von $\frac{l}{a}$ wird am freien Ende M_{df} sehr klein und im Einspannquerschnitte

$$\left(E\,\frac{d\,\vartheta}{d\,z}\right)_{\max} \sim \frac{M_d\,a}{(^1/_2\,h_t)^2\,J_{df}}.$$

Dieser Wert entspricht einen Balken von der Länge a, bei dem das Drehmoment nur durch Flanschquerkräfte übertragen wird. Man kann als grobe Annäherung annehmen, daß im Balkenteile von der Länge a vom Einspannungsquerschnitte an gemessen nur eine Uebertragung des Drehmomentes durch Flanschquerkräfte, im weiteren Balkenteile bis zum Balkenende nur durch reine Drehung erfolgt.

Für den nach Abb. 15 belasteten, zweimal gestützten Balken erhält man

$$\left.\begin{aligned}
&\text{von } z=0 \text{ bis } z=l_1: && \vartheta = \frac{M_{d1}}{G\,J_{dr}} - \frac{M_d}{G\,J_{dr}}\,\frac{\operatorname{Sin}\frac{l_2}{a}\,\operatorname{Cof}\frac{l_1-z}{a}}{\operatorname{Sin}\frac{l}{a}}\\
&\text{von } z=-l_2 \text{ bis } z=0: && \vartheta = -\frac{M_{d2}}{G\,J_{dr}} + \frac{M_d}{G\,J_{dr}}\,\frac{\operatorname{Sin}\frac{l_1}{a}\,\operatorname{Cof}\frac{l_2+z}{a}}{\operatorname{Sin}\frac{l}{a}}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (19),$$

woraus die übrigen Werte durch Differentiation zu finden sind. Durch Ueberlagerung kann der Formänderungs- und Spannungszustand des durch beliebige Drehmomente belasteten Balkens gefunden werden.

Für den nach Abb. 16 an den Enden gestützten Balken, der durch zwei symmetrisch angreifende Drehmomente belastet ist, erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{von } A \text{ bis } B && \vartheta = \frac{M_d}{G\,J_{dr}}\,\frac{\operatorname{Cof}\frac{l}{2a} - \operatorname{Cof}\frac{l_1}{a}\,\operatorname{Cof}\frac{l_1+l_2-z}{a}}{\operatorname{Cof}\frac{l}{2a}},\\
&\text{von } B \text{ bis } C && \vartheta = \frac{M_d}{G\,J_{dr}}\,\frac{\operatorname{Sin}\frac{l_2}{a}\,\operatorname{Sin}\frac{z}{a}}{\operatorname{Cof}\frac{l}{2a}},\\
&\text{von } C \text{ bis } D && \vartheta = -\frac{M_d}{G\,J_{dr}}\,\frac{\operatorname{Cof}\frac{l}{2a} - \operatorname{Cof}\frac{l_1}{a}\,\operatorname{Cof}\frac{l_1+l_2+z}{a}}{\operatorname{Cof}\frac{l}{2a}}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (20).$$

Trotzdem von B bis C das gesamte Drehmoment M_d gleich Null ist, werden ϑ, $M_{dr} = \vartheta\,G\,J_{dr}$ und $M_{df} = -M_{dr}$ nicht gleich Null. Man erhält in den Querschnitten dieses Balkenstückes Normalspannungen nach Gl. (7) mit dem Werte

$$\left(E\,\frac{d\,\vartheta}{d\,z}\right)_{z=0} = \frac{M_d\,a}{\left(\frac{1}{2}\,h_t\right)^2 J_{df}}\,\frac{\operatorname{Sin}\frac{l_2}{a}}{\operatorname{Cof}\frac{l}{2a}}, \qquad \left(E\,\frac{d\,\vartheta}{d\,z}\right)_{z=l_1} = \frac{M_d\,a}{\left(\frac{1}{2}\,h_t\right)^2 J_{df}}\,\frac{\operatorname{Sin}\frac{l_2}{a}\,\operatorname{Cof}\frac{l_1}{a}}{\operatorname{Cof}\frac{l}{2a}} \quad (21).$$

Ist der Balken in den Querschnitten A und D so gelagert, daß dieselben sich nicht verdrehen können, so erfolgt eine Verdrehung des mittleren Querschnittes um den Betrag

$$-\left(\int_0^{l_1}\vartheta\,dz + \int_{l_1}^{l_1+l_2}\vartheta\,dz\right) = -\frac{M_d}{G\,J_{dr}}\left(l_2 - a\,\frac{\operatorname{Sin}\frac{l_2}{a}}{\operatorname{Cof}\frac{l}{2a}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; (22).$$

5. Berechnungsbeispiel. Im Jahre 1909 und 1910 wurden von C. v. Bach in der Z. d. V. d. I. Biegungsversuche mit [-Trägern veröffentlicht, bei denen die belastenden Kräfte und die Auflagerkräfte nicht durch den Querkraftmittelpunkt, sondern durch den Schwerpunkt des betreffenden Querschnittes bzw. durch den Stegmittelpunkt gingen. Die Durchbiegungsversuche stimmen vollkommen mit den nach diesem Aufsatze durchgeführten, rechnerischen Ergebnissen überein [1]), der Spannungsversuch werde hier als Beispiel durchgerechnet.

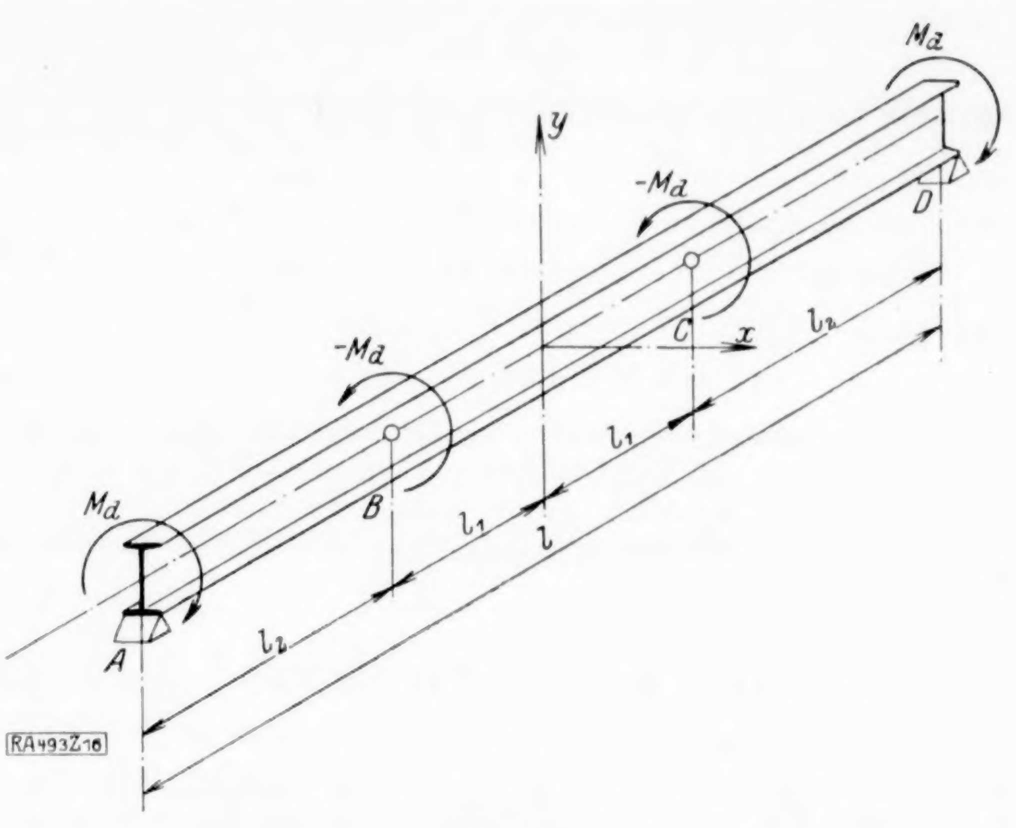


Abb. 16.

Der [-Träger N Pr 30 wird nach Abb. 17 belastet. Es sind die Spannungen im mittleren Querschnitte in den Punkten P_1, P_2, P_3 und P_4, Abb. 18, zu berechnen. Die Kräfte gehen, Fall 1, durch den Querkraftmittelpunkt, Fall 2, durch den Stegmittelpunkt, Fall 3, durch den Schwerpunkt der Querschnitte.

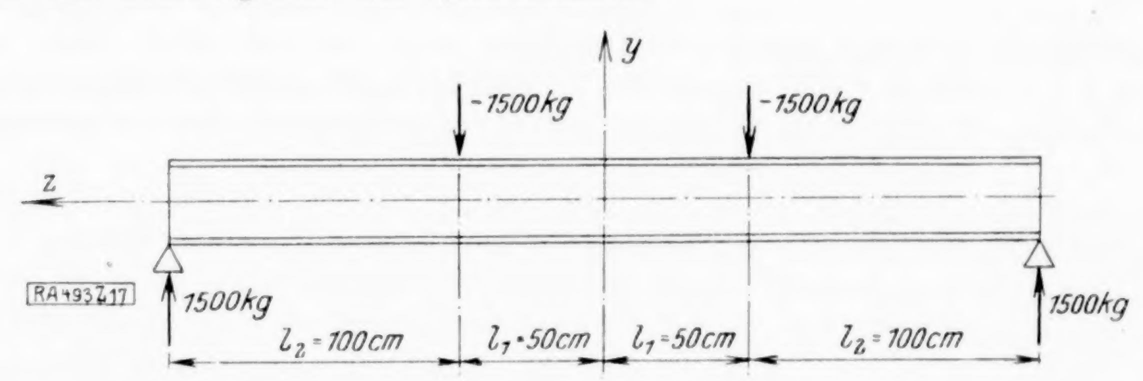


Abb. 17.

Fall 1: Es ist

von A bis B . . . $Q_y = 1500$ kg, $\quad M_x = -Q_y(\frac{1}{2}l - z) = -1500\,(150 - z)$ cmkg,
von B bis C . . . $Q_y = 0$ kg, $\quad M_x = -Q_y l_2 = -150\,000$ cmkg,
von C bis D . . . $Q_y = -1500$ kg, $\quad M_x = -Q_y(\frac{1}{2}l - z) = -1500\,(150 + z)$ cmkg.

Die Biegungsspannungen zwischen B und C sind

$$\sigma_z = \frac{-150\,000}{8026}\,y, \text{ für } P_1 \text{ und } P_2\text{: } -271 \text{ kg/cm}^2, \text{ für } P_3 \text{ und } P_4\text{: } +271 \text{ kg/cm}^2.$$

Fall 2: Da $x_t = -3{,}2$ cm ist [2]), so ist von A bis B das Drehmoment $M_d = -3{,}2 \cdot 1500 = -4800$ cmkg, von C bis D das Drehmoment $M_d = +4800$ cmkg zu überlagern.

Man erhält für diesen Querschnitt: $J_{xy}' = 920$ cm^4,

$$J_{df} = J_y - 4\,\frac{J_{xy}'^2}{J_x} = 495 + 58{,}5 \cdot 2{,}2^2 - 4\,\frac{920^2}{8026} = 357 \text{ cm}^4,$$

$$J_{dr} = 2\left[\frac{1}{12} \cdot \frac{10\,(2{,}0^4 - 1{,}2^4)}{2{,}0 - 1{,}2} - 0{,}105\,(2{,}0^4 + 1{,}2^4)\right] + \tfrac{1}{3}\,1^3 \cdot 28{,}04 = 34{,}6 \text{ cm}^4.$$

(Der Querschnitt ist zur Berechnung von J_{dr} in die zwei langen Flanschtrapeze und das lange Stegrechteck zerlegt, dessen Höhe zur Berücksichtigung der Abrundungen und Uebergänge gleich h_t genommen ist [3]).

---

[1]) Siehe Dr.-Dissertation des Verfassers.

[2]) Siese diese Zeitschrift Bd. 4, S. 347. Gl. (65) und weiter.

[3]) Berechnung von J_{dr} siehe: Forschungsarbeit Heft 249. C. Weber. Die Lehre der Drehungsfestigkeit.

$$\tfrac{1}{2}\, h_t = 14{,}02 \text{ cm}, \quad a = \tfrac{1}{4}\, h_t \sqrt{\frac{E}{G}\,\frac{J_{df}}{J_{dr}}} = 2{,}58\, h_t = 72{,}5 \text{ cm}.$$

Für den mittleren Querschnitt wird nach Gl. (21)

$$E\left(\frac{d\vartheta}{dz}\right)_{z=0} = -\,\frac{M_d}{J_{df}}\,\frac{a}{(\tfrac{1}{2}\,h_t)^2}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{l_2}{a}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{l}{2\,a}} = \frac{4800 \cdot 72{,}5}{357 \cdot 14{,}02^2}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{100}{72{,}5}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{300}{145}} = 2{,}30$$

und nach Gl. (7):

$$\sigma_z' = 2{,}30\,(14{,}02\,x - 3{,}2\,y), \qquad \sigma_z'' = -\,230\,(14{,}02\,x + 3{,}2\,y).$$

In den Boobachtungspunkten erhält man die Spannungen

$P_1 \ldots \sigma_z = -\,123$, $\quad P_2 \ldots \sigma_z = +\,200$, $\quad P_3 \ldots \sigma_z = +\,123$, $\quad P_4 \ldots \sigma_z = -\,200$ kg/cm².

Die Verdrehung des mittleren Querschnittes wird nach Gl. (22):

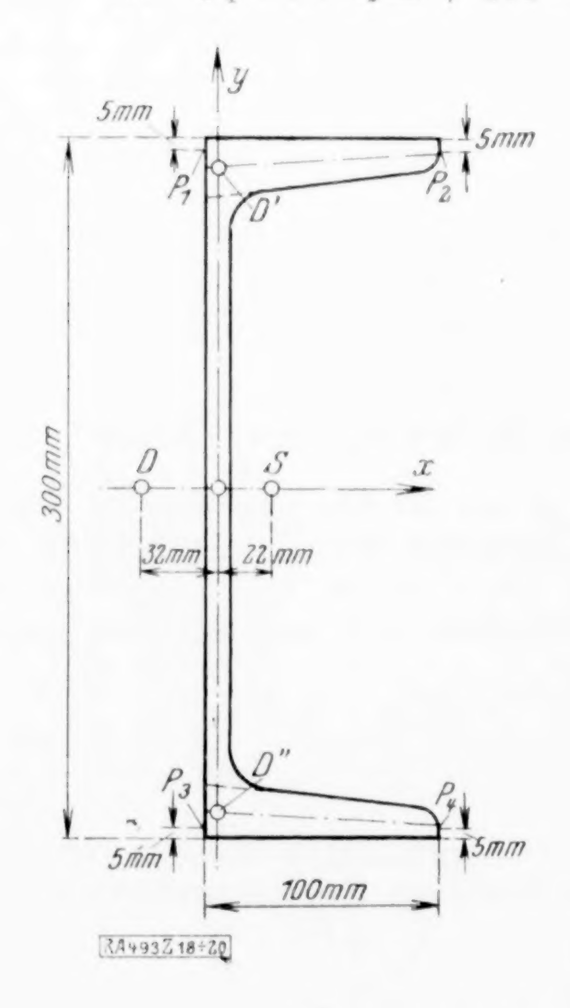
$$\frac{4800}{810\,000 \cdot 34{,}6}\left(100 - 72{,}5\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{100}{72{,}5}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{300}{145}}\right) = +\,0{,}01140.$$

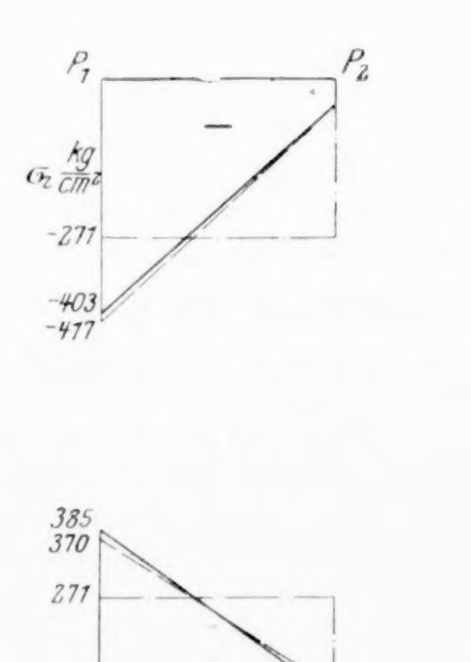
Infolge dieser, wenn auch geringen Verdrehung fällt die Achse des biegenden Momentes nicht mehr mit der ursprünglichen x-Achse des mittleren Querschnittes zusammen. Man erhält außer dem biegenden Momente $M_x \sim -\,150\,000$ cmkg noch ein biegendes Moment $M_y \sim 150\,000 \cdot 0{,}01140 = 1710$ cmkg.

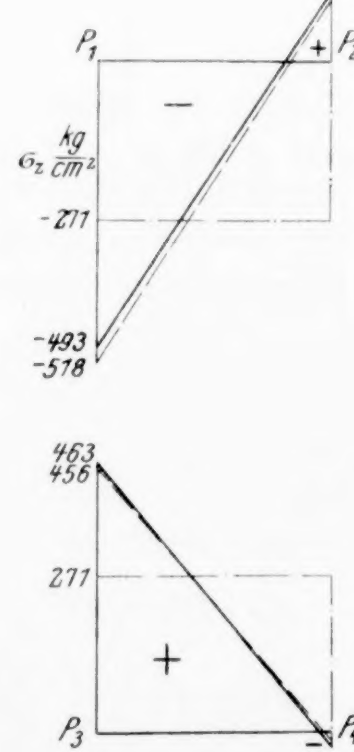
Es treten hierdurch noch folgende Spannungen auf: an der Außenseite des Steges $\sigma_z = -\,\frac{1710 \cdot 2{,}7}{495} = -\,9{,}3$ kg/cm², an den Enden der Flansche $\sigma_z = \frac{1710 \cdot 7{,}3}{495} = 25{,}2$ kg/cm².

Man erhält im Ganzen die Spannungen

	rechnerisch ermittelt:	Versuchsergebnis:
Punkt P_1 . . .	$\sigma_z = -\,271 - 123 - 9 = -\,403$ kg/cm²	$-\,417$ kg/cm²
» P_2 . . .	$\sigma_z = -\,271 + 200 + 25 = -\,46$ »	$-\,45$ »
» P_3 . . .	$\sigma_z = +\,271 + 123 - 9 = +\,385$ »	$+\,370$ »
» P_4 . . .	$\sigma_z = +\,271 - 200 + 25 = +\,96$ »	$+\,113$ »







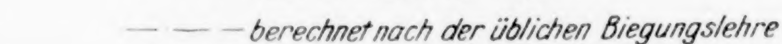


Abb. 18 bis 20.

Die Ergebnisse sind in Abb. 19 dargestellt, gestrichelt die Versuchsergebnisse, strichpunktiert die Spannung nach Fall 1.

Fall 3: Dieser Fall ist wie Fall 2 zu behandeln, nur wird das drehende Moment von A bis B $M_d = - 8100$, von C bis D $M_d = + 8100$ cmkg.

Man erhält

	rechnerisch ermittelt:	Versuchsergebnis:
Punkt P_1 . . .	$\sigma_z = - 271 - 207 - 15 = - 493$ kg/cm²	$- 518$ kg/cm²
» P_2 . . .	$\sigma_z = - 271 + 337 + 118 = 118$ »	104 »
» P_3 . . .	$\sigma_z = + 271 + 207 - 15 = 463$ »	456 »
» P_4 . . .	$\sigma_z = + 271 - 337 + 118 = - 24$ »	$- 16$ »

Die Spannungen sind in Abb. 20, wie oben, dargestellt.

Die scheinbare Minderwertigkeit der [-Träger ist hiermit aufgeklärt. Es ist möglich, die zusätzlichen Spannungen infolge der Flanschbiegung durch zweckmäßige Belastung zu vermeiden, im Falle ihres Auftretens jedoch sie rechnerisch genau zu ermitteln. 493

Über die Berechnung von freitragenden Flugzeugflügeln.

Von C. B. BIEZENO, J. J. KOCH in Delft und C. KONING in Amsterdam.

1. Einleitung. Vor einiger Zeit wurde der erstgenannte Verfasser von dem »Ryksstudiedienst voor de Luchtvaart« zu Amsterdam damit beauftragt, eine Berechnungsweise zu entwerfen für freitragende Flügel, wie diese z. B. bei den Fokker-Flugzeugen Verwendung finden. Zum Experimentieren war ein solcher Flügel in der genannten Reichsanstalt vorhanden, so daß die zu findenden Rechenresultate mit Hilfe von Versuchen nachgeprüft werden konnten. Obwohl die Experimente, welche dazu dienen sollten, die inzwischen aufgestellte Berechnungsweise zu kontrollieren (bzw. zu ergänzen) noch nicht abgeschlossen sind, läßt die bis jetzt erhaltene Uebereinstimmung zwischen den theoretischen und experimentellen Ergebnissen es als angebracht erscheinen, kurz über die in gemeinsamer Arbeit mit den beiden anderen Autoren erhaltenen, theoretischen Resultate zu berichten.

Es möge übrigens an dieser Stelle auch auf eine Arbeit von Herrn K. Thalau hingewiesen werden[1]) deren Inhalt den Verfassern erst kürzlich bekannt wurde und in welcher, wenn auch in ganz anderer Weise für einen speziellen Fall Ergebnisse erzielt werden, die mit den von uns erhaltenen Resultaten in vollständigem Einklang stehen.

2. Die der Berechnung zugrunde gelegten Einschränkungen. Wir unterscheiden bei dem in Betracht kommenden Flügel das sogenannte Gerippe und seine Sperrholz-Beplankung. Weil es sich erwarten läßt, daß der (übrigens sehr bedeutende) Einfluß der letzteren auf die Steifigkeit des Flügels vorläufig kaum einer direkten Berechnung zugänglich gemacht werden kann, betrachten wir vorläufig nur das Gerippe und überlassen es dem Experimente, Aufklärung über den Einfluß der Bekleidung zu geben.

Wie bekannt besteht das Gerippe aus zwei Holmen, welche durch in kurzen Abständen von einander stehende Rippen mit einander verbunden sind (vergl. Abb. 1). Diese Rippen haben in ihrer Ebene eine verhältnismäßig große Biegungsfestigkeit. Dagegen kann ihr Widerstand gegen eventuelle Torsionsbeanspruchung null gesetzt werden. Die Holme durchdringen den Steg der Rippen senkrecht und sind örtlich fest mit ihnen verbunden.

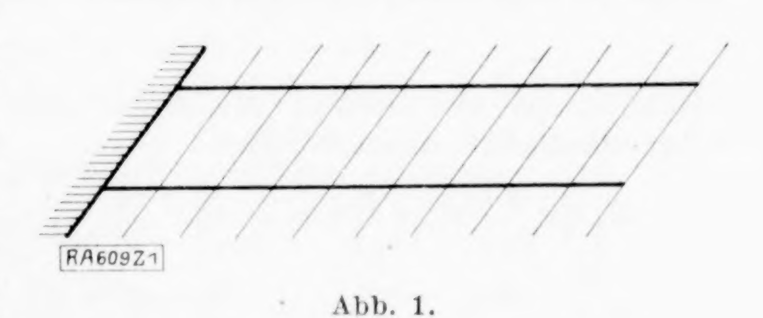


Abb. 1.

Zur Elimination ihres Einflusses auf die Biegungs- und Torsionserscheinungen, wird die Beplankung in der Mitte von jeden zwei aufeinander folgenden Rippen als durchgeschnitten angenommen, sodaß jede Rippe ein ganz bestimmtes »Feld« der Belastung zu tragen hat.

Für die Elastizitätsmoduln G und E der Holme, welche aus verschienenen Holzarten zusammengestellt sind, werden konstante mittlere Werte eingeführt.

[1]) Vergl. Berichte und Abhandlungen der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt, 12. Heft (Juli 1925), S. 53 bis 56, und einen in der Zeitschr. f. Flugtechn. erschienenen Artikel (Jahrg. 1925, S. 415).

3. Die für die Rippen geltenden Gleichungen. Wir denken uns den Flügel an dem Rumpf derart befestigt, daß er als eingeklemmt angesehen werden kann und geben die Lage eines Holmquerschnittes durch den Abstand x zu dieser Einspannstelle an: Die Steifigkeitsfaktoren gegen Biegung beider Holme seien mit S_{1b} und S_{2b}, diejenigen gegen Torsion mit S_{1t} und S_{2t} angegeben; der Index 1 deutet auf den vorderen Holm, der Index 2 auf den hinteren Holm hin. Die Lage eines Rippenquerschnittes möge durch seinen Abstand u bis zur Achse des vorderen Holmes angegeben werden; der Steifigkeitsfaktor gegen Biegung einer Rippe heiße S.

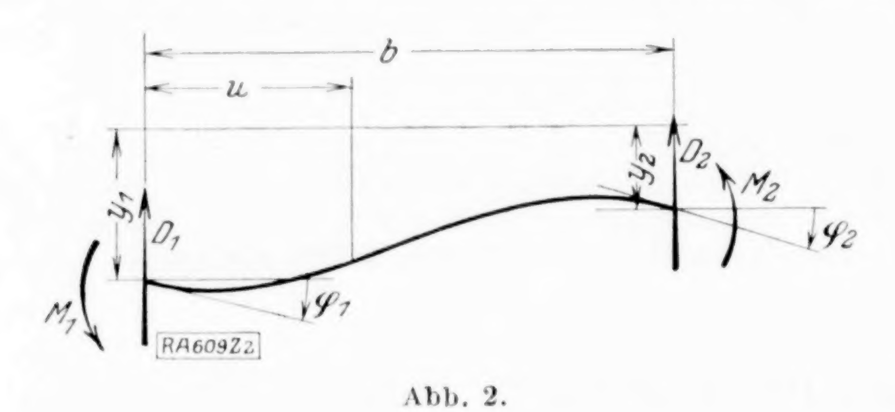


Abb. 2.

Wir betrachten nun zunächst ein Rippenstück (Länge b), wie es zwischen beiden Holmen liegt, führen in die Endquerschnitte (Abb. 2) dieses Stückes, die von den Holmen ausgeübten Querkräfte (D_1, D_2) und Momente (M_1, M_2) ein und bestimmen den von diesen Größen und von der gegebenen Belastung q_u bedingten Ordinatenunterschied $(y_1 - y_2)$ mit Hilfe des Satzes, daß bei einem einseitig, horizontal eingespannten Balken die vertikale Durchbiegung seines Endpunktes aufzufassen ist als das auf diesen Punkt bezogene statische Moment der in Bezug auf den Steifigkeitsfaktor S reduzierten Momentenfläche.

Gibt man für einen Querschnitt (u) mit M_u das Moment an, welches bei dem in seinen Endpunkten frei gelagerten Rippenstücke von der Belastung q_u bedingt wird, mit $M_{1,u} = -\frac{(b-u)}{b} M_1$, das Moment, daß bei denselben Auflagerbedingungen von M_1 und mit $M_{2,u} = \frac{u}{b} M_2$ dasjenige, das von M_2 herrührt und setzt man zur Abkürzung:

$$\int_0^b \frac{M\,(b-u)\,du}{S} = B, \qquad \int_0^b \frac{M\,u\,du}{S} = C, \qquad \int_0^b \frac{(b-u)^2\,du}{S\,b} = B_1, \qquad \int_0^b \frac{(b-u)\,u\,du}{S\,b} = C_1$$

$$\int_0^b \frac{(b-u)\,u\,du}{S\,b} = B_2, \qquad \int_0^b \frac{u^2\,du}{S\,b} = C_2, \qquad \int_0^b q_u\,(b-u)\,du = \gamma_1, \qquad \int_0^b q_u\,u\,du = \gamma_2$$

so findet man, wenn schließlich noch die Drehungswinkel φ_1 und φ_2 der Endquerschnitte eingeführt werden:

$$y_1 - y_2 = -b\,\varphi_1 + B - B_1 M_1 + B_2 M_2 \qquad y_1 - y_2 = -b\,\varphi_2 - C + C_1 M_1 - C_2 M_2$$

Diese beiden Gleichungen, zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen:

$$D_1\,b - (M_1 + M_2) = \gamma_1 \qquad D_2\,b + (M_1 + M_2) = \gamma_2$$

erlauben es, die Größen M_1, M_2, D_1 und D_2 in den Deformationsgrößen y_1, y_2, φ_1 und φ_2 folgendermaßen auszudrücken:

$$M_1 = \frac{B\,C_2 - C\,B_2}{B_1\,C_2 - B_2\,C_1} - \frac{B_2 + C_2}{B_1\,C_2 - B_2\,C_1}\left(y_1 - y_2\right) - \frac{C_2\,b}{B_1\,C_2 - B_2\,C_1}\varphi_1 - \frac{B_2\,b}{B_1\,C_2 - B_2\,C_1}\varphi_2$$

$$M_2 = \frac{B\,C_1 - C\,B_1}{B_1\,C_2 - B_2\,C_1} - \frac{B_1 + C_1}{B_1\,C_2 - B_2\,C_1}\left(y_1 - y_2\right) - \frac{C_1\,b}{B_1\,C_2 - B_2\,C_1}\varphi_1 - \frac{B_1\,b}{B_1\,C_2 - B_2\,C_1}\varphi_2$$

$$D_1 = \frac{M_1 + M_2}{b} + \frac{\gamma_1}{b}, \qquad D_2 = -\frac{M_1 + M_2}{b} + \frac{\gamma_2}{b}.$$

Schreibt man zur weiteren Abkürzung:

$$\frac{B\,C_2 - C\,B_2}{B_1\,C_2 - B_2\,C_1} = \alpha; \quad \frac{C_2 + B_2}{B_1\,C_2 - B_2\,C_1} = \alpha_1; \quad \frac{C_2\,b}{B_1\,C_2 - B_2\,C_1} = \alpha_2; \quad \frac{B_2\,b}{B_1\,C_2 - B_2\,C_1} = \alpha_3;$$

$$\frac{B\,C_1 - C\,B_1}{B_1\,C_2 - B_2\,C_1} = \beta; \quad \frac{C_1 + B_1}{B_1\,C_2 - B_2\,C_1} = \beta_1; \quad \frac{C_1\,b}{B_1\,C_2 - B_2\,C_1} = \beta_2; \quad \frac{B_1\,b}{B_1\,C_2 - B_2\,C_1} = \beta_3,$$

so erhält man:

$$M_1 = \alpha - \alpha_1 (y_1 - y_2) - \alpha_2 \varphi_1 - \alpha_3 \varphi_2 , \qquad M_2 = \beta - \beta_1 (y_1 - y_2) - \beta_2 \varphi_1 - \beta_3 \varphi_2$$

$$D_1 = \frac{\alpha + \beta - \gamma_1}{b} - \frac{\alpha_1 + \beta_1}{b} (y_1 - y_2) - \frac{\alpha_2 + \beta_2}{b} \varphi_1 - \frac{\alpha_3 + \beta_3}{b} \varphi_2$$

$$D_2 = - \frac{\alpha + \beta - \gamma_2}{b} + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{b} (y_1 - y_2) + \frac{\alpha_2 + \beta_2}{b} \varphi_1 + \frac{\alpha_3 + \beta_3}{b} \varphi_2 .$$

4. Die Differentialgleichungen der beiden Holme. Die äußere, bekannte Belastung der, von den zwischen ihnen liegenden Rippenstücken frei gedachten Holme, ist mit derjenigen der mit ihnen noch verbundenen Rippenstücke identisch. Sie ist durch eine in ihrer Längsrichtung kontinuierlich verlaufende senkrechte Belastung $\bar{q}_1$ (resp. $\bar{q}_2$) und ein kontinuierlich verlaufendes Torsionsmoment T_1 (resp. T_2) zu ersetzen.

Beide Holme werden also gebogen und tordiert, so daß für jede eine Biegungs- und eine Torsionsgleichung aufgestellt werden muß. Denkt man sich nun, zur naheliegenden Vereinfachung des Problems, sowohl die Kräfte D, wie die Momente M über die von der betreffenden Rippe bedienten Feldlänge der Holme gleichmäßig verteilt, so lassen sich diese Gleichungen folgendermaßen schreiben:

$$(S_{1b}\, y_1'')'' = \bar{q}_1 + \frac{D_1}{\lambda} ; \qquad (S_{2b}\, y_2'')'' = \bar{q}_2 + \frac{D_2}{\lambda} ;$$

$$(S_{1t}\, \varphi_1')' = - \left(- T_1 + \frac{M_1}{\lambda} \right) ; \qquad (S_{2t}\, \varphi_2')' = - \left(T_2 + \frac{M_2}{\lambda} \right)$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}
(S_{1b}\, y_1'')'' &= \bar{q}_1 + \frac{\alpha + \beta + \gamma_1}{\lambda b} - \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\lambda b} (y_1 - y_2) - \frac{\alpha_2 + \beta_2}{\lambda b} \varphi_1 - \frac{\alpha_3 + \beta_3}{\lambda b} \varphi_2 \\
(S_{2b}\, y_2'')'' &= \bar{q}_2 - \frac{\alpha + \beta - \gamma_2}{\lambda b} + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\lambda b} (y_1 - y_2) + \frac{\alpha_2 + \beta_2}{\lambda b} \varphi_1 + \frac{\alpha_3 + \beta_3}{\lambda b} \varphi_2 \\
(S_{1t}\, \varphi_1')' &= + T_1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\alpha_1}{\lambda} (y_1 - y_2) + \frac{\alpha_2}{\lambda} \varphi_1 + \frac{\alpha_3}{\lambda} \varphi_2 \\
(S_{2t}\, \varphi_2')' &= - T_2 - \frac{\beta}{\lambda} + \frac{\beta_1}{\lambda} (y_1 - y_2) + \frac{\beta_2}{\lambda} \varphi_1 + \frac{\beta_3}{\lambda} \varphi_2
\end{aligned}\right\} \quad (I).$$

Zur Vereinfachung dieser Gleichungen führen wir nun, die nachträglich durch das Experiment als berechtigt erwiesene Annahme ein, daß die Rippen gegen Biegung sich unendlich steif verhalten, sodaß gestellt werden kann:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi , \qquad y_1 - y_2 = - b\, \varphi .$$

Man entnimmt dann den letzten beiden Gleichungen (I):

$$\frac{\alpha + \beta}{\lambda b} - \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\lambda b} (y_1 - y_2) - \frac{\alpha_2 + \beta_2}{\lambda b} \varphi_1 - \frac{\alpha_3 + \beta_3}{\lambda b} \varphi_2 = + \frac{T_1 - T_2}{b} - \frac{(S_{1t}\, \varphi')' + (S_{2t}\, \varphi')'}{b} =$$

$$= + \frac{T_1 - T_2}{b} + \frac{S_{1t} + S_{2t}}{b^2} (y_1 - y_2)'' + \frac{b\,(S_{1t} + S_{2t})' - 2\, b'\,(S_{1t} + S_{2t})}{b^3} (y_1 - y_2)' -$$

$$- \frac{b\, b'\,(S_{1t} + S_{2t})' + (b\, b'' - 2\, b'^2)\,(S_{1t} + S_{2t})}{b^4} (y_1 - y_2) ,$$

sodaß die ersten beiden in folgender Form geschrieben werden können:

$$(S_{1b}\, y_1'')'' = \left(\bar{q}_1 + \frac{\gamma_1}{\lambda b} + \frac{T_1 - T_2}{b} \right) + \frac{S_{1t} + S_{2t}}{b^2} (y_1 - y_2)'' + \frac{b\,(S_{1t} + S_{2t})' - 2\, b'\,(S_{1t} + S_{2t})}{b^3} (y_1 - y_2)' -$$

$$- \frac{b\, b'\,(S_{1t} + S_{2t})' + (b\, b'' - 2\, b'^2)\,(S_{1t} + S_{2t})}{b^4} (y_1 - y_2)$$

$$(S_{2b}\, y_2'')'' = \left(\bar{q}_2 + \frac{\gamma_2}{\lambda b} - \frac{T_1 - T_2}{b} \right) - \frac{S_{1t} + S_{2t}}{b^2} (y_1 - y_2)'' - \frac{b\,(S_{1t} + S_{2t})' - 2\, b'\,(S_{1t} + S_{2t})}{b^3} (y_1 - y_2)' +$$

$$+ \frac{b\, b'\,(S_{1t} + S_{2t})' + (b\, b'' - 2\, b'^2)\,(S_{1t} + S_{2t})}{b^4} (y_1 - y_2) .$$

Die in den zweiten Gliedern dieser letzten Gleichungen vorkommenden Klammerausdrücke haben eine einfache Bedeutung. Sie stellen nämlich, wie man sich durch Aufstellung der betreffenden Momenten-Gleichgewichtsbedingungen leicht überzeugt, diejenigen kontinuierlichen Holmbelastungen q_1 und q_2 dar, welche auftreten würden, wenn

die von jeder Rippe getragene Belastung statisch über die Holme verteilt würde, sodaß man schreiben kann:

$$(S_{1b}\,y_1'')'' = q_1 + \frac{S_{1t}+S_{2t}}{b^2}(y_1-y_2)'' + \frac{b\,(S_{1t}+S_{2t})' - 2\,b'\,(S_{1t}+S_{2t})}{b^3}(y_1-y_2)' - $$
$$- \frac{b\,b'\,(S_{1t}+S_{2t})' + (b\,b'' - 2\,b'^2)\,(S_{1t}+S_{2t})}{b^4}(y_1-y_2)$$

$$(S_{2b}\,y_2'')'' = q_2 - \frac{S_{1t}+S_{2t}}{b^2}(y_1-y_2)'' - \frac{b\,(S_{1t}+S_{2t})' - 2\,b'\,(S_{1t}+S_{2t})}{b^3}(y_1-y_2)' + $$
$$+ \frac{b\,b'\,(S_{1t}+S_{2t})' + (b\,b'' - 2\,b'^2)\,(S_{1t}+S_{2t})}{b^4}(y_1-y_2).$$

Die Biegungsgleichungen nehmen also, wenn man schließlich noch zur Abkürzung

$$\frac{S_{1t}+S_{2t}}{b^2} = r \qquad \frac{b\,(S_{1t}+S_{2t})' - 2\,b'\,(S_{1t}+S_{2t})}{b^3} = s \qquad - \frac{b\,b'\,(S_{1t}+S_{2t})' + (b\,b'' - 2\,b'^2)\,(S_{1t}+S_{2t})}{b^4} = t$$

setzt, die Form an:

$$\left.\begin{aligned}(S_{1b}\,y_1'')'' &= q_1 + r\,(y_1-y_2)'' + s\,(y_1-y_2)' + t\,(y_1-y_2)\\ (S_{2b}\,y_2'')'' &= q_2 - r\,(y_1-y_2)'' - s\,(y_1-y_2)' - t\,(y_1-y_2)\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (\text{II}).$$

5. Näherungslösung der Differentialgleichungen. Zur Lösung der obenstehenden Gleichungen (II) stellt man:

$$y_1 = y + \bar{y}_1\,, \qquad y_2 = y + \bar{y}_2$$

und bestimmt y derart, daß sie der Differentialgleichung:

$$(S_{1b}\,y'') + (S_{2b}\,y'')'' = q_1 + q_2 \quad \text{oder} \quad \{S_{1b} + S_{2b})\,y''\}'' = q_1 + q_2 \quad . \; . \quad (\text{III})$$

genügt und die Randbedingungen: $x = 0,\ y = 0$; $x = 0,\ y' = 0$; $x = l$ ($l =$ Länge des Flügels), $y'' = 0$; $x = l,\ y''' = 0$ befriedigt.

Diese Lösung für y wird, wegen der Veränderlichkeit des Faktors $(S_{1b} + S_{2b})$ am einfachsten graphisch, mit Hilfe der bekannten Mohrschen Methode, bestimmt.

Aus der in dieser Weise erhaltenen Funktion y leitet man die Größen:

$$\bar{q}_1 = (S_{1b}\,y'')'' \quad \text{und} \quad \bar{q}_2 = (S_{2b}\,y'')''\ ^{1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\text{III}')$$

ab; analytisch geht man am zweckmäßigsten wie folgt vor: Unter Berücksichtigung der Randbedingungen, welche zum Ausdruck bringen, daß für $x = l$, sowohl die Querkraft D, wie das Moment M gleich null sein muß, erhält man:

$$\{(S_{1b} + S_{2b})\,y''\}' = \int_x^l (q_1 + q_2)\,d\,x = D\,, \qquad \{(S_{1b} + S_{2b})\,y''\} = \int_0^{l-x} (q_1 + q_2)\,\eta\,d\,\eta = M.$$

Hieraus ergibt sich:

$$S_{1b}\,y'' = \frac{S_{1b}}{S_{1b} + S_{2b}}\,M.$$

Zweimalige Differentiation dieser Gleichung liefert:

$$\bar{q}_1 = (S_{1b}\,y'')'' = \frac{S_{1b}}{S_{1b} + S_{2b}}(q_1 + q_2) + 2\left(\frac{S_{1b}}{S_{1b} + S_{2b}}\right)' D + \left(\frac{S_{1b}}{S_{1b} + S_{2b}}\right)'' M.$$

In gleicher Weise erhält man:

$$\bar{q}_2 = (S_{2b}\,y'')'' = \frac{S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}}(q_1 + q_2) + 2\left(\frac{S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}}\right)' D + \left(\frac{S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}}\right)'' M.$$

Es sind also zur Bestimmung von $\bar{q}_1$ und $\bar{q}_2$ nur die beiden genannten Integrationen

$$\int_x^l (q_1 + q_2)\,d\,x \quad \text{und} \quad \int_0^{l-x} (q_1 + q_2)\,\eta\,d\,\eta$$

erforderlich, wodurch die Hauptgleichungen (II):

$$\{S_{1b}\,(y + \bar{y}_1)''\}'' = (S_{1b}\,y'')'' + (S_{1b}\,\bar{y}_1'')'' = q_1 + r\,(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)'' + s\,(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)' + t\,(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)$$
$$\{S_{2b}\,(y + \bar{y}_2)''\}'' = (S_{2b}\,y'')'' + (S_{2b}\,\bar{y}_2'')'' = q_2 - r\,(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)'' - s\,(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)' - t\,(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)$$

[1] Diese Größen sind natürlich verschieden von den in der vorigen Nr. mit denselben Buchstaben angegebenen; Verwechslung scheint aber ausgeschlossen.

übergeführt werden in:

$$\left.\begin{array}{l}(S_{1b}\,\bar y_1'')'' = (q_1 - \bar q_1) + r\,(\bar y_1 - \bar y_2)'' + s\,(\bar y_1 - \bar y_2)' + t\,(\bar y_1 - \bar y_2)\\ (S_{2b}\,\bar y_2'')'' = (q_2 - \bar q_2) - r\,(\bar y_1 - \bar y_2)'' - s\,(\bar y_1 - \bar y_2)' - t\,(\bar y_1 - \bar y_2)\end{array}\right\} \quad . \quad \text{(IV)}.$$

Diese beiden Gleichungen haben dieselbe Form wie die ursprünglichen Gleichungen. Sie liefern also diejenigen Holmdurchbiegungen, welche bei einer Belastung $(q_1 - \bar q_1)$ der ersten und einer Belastung $(q_2 - \bar q_2)$ des zweiten Holmes auftreten würden.

Nun folgt aus der Verbindung der Gleichungen (III) und (III'), daß:

$$\bar q_1 + \bar q_2 = q_1 + q_2 \qquad \text{d. h.} \qquad q_1 - \bar q_1 = -(q_2 - \bar q_2).$$

Man kann also eine willkürliche Flügelbelastung, nachdem sie in statischer Weise über die beiden Holme verteilt ist, stets in zwei Komponenten $(\bar q_1, \bar q_2)$ und $(q_1 - \bar q_1)$, $(q_2 - \bar q_2)$ derart zerlegen, daß die erste Belastung die beiden Holme in genau derselben Weise durchbiegt und die zweite Belastung bis auf das Zeichen nach, für beide Holme gleich ist. Diese zweite Belastung bedingt also die Torsion des Flügels.

6. Fortsetzung. Die Lösung der Gleichungen (IV) geschieht in indirekter Weise und zwar dadurch, daß man nicht von der vorgeschriebenen Belastung $(q_1 - \bar q_1)$, $(q_2 - \bar q_2)$ der beiden Holme ausgeht, sondern von einer andern vorläufig willkürlichen $\bar p - p$, zu welcher man diejenigen Funktionen $\bar y_1$ und $\bar y_2$ sucht, welche den Differentialgleichungen:

$$(S_{1b}\,\bar y_1'')'' = \bar p\,, \qquad (S_{2b}\,\bar y_2'')'' = -\bar p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(V)}$$

und den noch näher zu erläuternden Randbedingungen genügen. Sodann bestimmt man mit Hilfe der Gleichung:

$$\bar p - r\,(\bar y_1 - \bar y_2)'' - s\,(\bar y_1 - \bar y_2)' - t\,(\bar y_1 - \bar y_2) = p$$

die Größe p.

Dann bilden p und $-p$ ein System von auf die beiden Holme anzubringenden Belastungen, zu welchen die aus den Gleichungen (V) bekannten Durchbiegungen $\bar y_1$ und $\bar y_2$ gehören; werden doch die Gleichungen:

$$(S_{1b}\,\bar y_1'')'' = \{p + r\,(\bar y_1 - \bar y_2)'' + s\,(\bar y_1 - \bar y_2)' + t\,(\bar y_1 - \bar y_2)\}$$
$$(S_{2b}\,\bar y_2'')'' = -\{p + r\,(\bar y_1 - \bar y_2)'' + s\,(\bar y_1 - \bar y_2)' + t\,(\bar y_1 - \bar y_2)\}$$

von den eben definierten Funktionen $\bar y_1$, $\bar y_2$ befriedigt.

Hat man zu einer genügenden Anzahl von p-Funktionen: $\bar p_1, \bar p_2, \bar p_3, \ldots \bar p_n$ die zugehörigen p-Funktionen: $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ bestimmt, so hat man nur noch die vorgegebene Belastung $(q_1 - \bar q_1)$ durch eine andere von der Form:

$$c_1\,p_1 + c_2\,p_2 + c_3\,p_3 + \ldots$$

anzunähern, um als Summe der zu den Belastungen $c_1\,p_1$, $c_2\,p_2 \ldots$ gehörigen Deformationen, die bei der Belastung $q_1 - \bar q_1$ auftretenden Durchbiegungen zu approximieren.

Die Bestimmung der Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots$ geschieht erfahrungsgemäß am zweckmäßigsten in der Weise, daß für eine Reihe von Intervallen $0 - x_1$, $x_1 - x_2$, $\ldots x_{n-1} - l$, (deren Anzahl mit derjenigen der Konstanten c übereinstimmt), die von den Belastungen $q_1 - \bar q_1$ und $c_1\,p_1 + c_2\,p_2 + \ldots$ gelieferten Gesamtbeträge einander gleich gesetzt werden [1]).

Die praktische Ausführung dieser Methode läuft also darauf hinaus, daß man die Gleichungen (V) für zweckmäßig gewählte Funktionen $\bar p$ integriert, was, wegen der Veränderlichkeit von S_{1b} und S_{2b} auch jetzt wieder am besten graphisch geschieht. Dabei hat man aber, wie oben schon angedeutet, den Randbedingungen besondere Aufmerksamkeit zu widmen.

An der eingespannten Seite lauten diese natürlich: $x = 0$, $\bar y_{1,2} = 0$, $\bar y_1{}'{}_{,2} = 0$. Am anderen, sogenannten freien Ende des Flügels, also für $x = l$, ist für beide Holme auch

---

[1]) Vergleich für Anwendungen dieser Methode: C. B. Biezeno en J. J. Koch: Over een nieuwe methode ter berekening van vlakke platen, met toepassing op eenige voor de techniek belangryke belastingsgevallen. De Ingenieur, 1923, Nr. 2. — C. B. Biezeno en J. J. Koch: Over de berekening van een, over zyn geheele lengte elastisch ondersteunden balk. De Ingenieur, 1923, Nr. 43. — C. B. Biezeno Graphical and numerical methods for solving stress Problems. Proceedings of the first International Congress for Applied Mechanics, Delft 1924.

noch $y'' = 0$ zu setzen, weil daselbst keine biegende Momente vorhanden sind. Dagegen müssen an dieser Stelle konzentrierte Querkräfte wirken, weil in den Endquerschnitten der Holme Torsionsmomente T_1 und T_2 anwesend sind, welche in dem Verlauf der in den Holm-Enden auftretenden Verdrehungswinkel ihren Ursprung finden. Diese Verdrehungswinkel sind in jedem Querschnitt gleich demjenigen, welcher für den Flügel, als Ganzes betrachtet, auftritt und zwar gleich

$$-\frac{y_1 - y_2}{b}.$$

Die Veränderung dieses Verdrehungswinkels bestimmt für jeden Holm ein Torsionsmoment, das an dem freien Flügelende durch:

$$-S_{1t}\left(\frac{y_1 - y_2}{b}\right)'_{x=l} \qquad \text{resp.} \qquad -S_{2t}\left(\frac{y_1 - y_2}{b}\right)'_{x=l}$$

gegeben ist.

Diese beiden Momente müssen von den in denselben Endquerschnitten wirkenden Querkräften X und $-X$, welche zusammen ein Kräftepaar bilden, aufgehoben werden, so daß (wenn der vordere Holm eine nach oben gerichtete Kraft trägt) die Gleichgewichtsbedingung:

$$X b_l - S_{1t}\left(\frac{y_1 - y_2}{b}\right)'_{x=l} - S_{2t}\left(\frac{y_1 - y_2}{b}\right)'_{x=l} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VI)}$$

lautet.

Die in dieser Randbedingung auftretenden y_1 und y_2 sind dabei aufzufassen als die Summe der Durchbiegungen, welche von den Belastungen p und $-p$ und von den unbekannten Einzelkräften X und $-X$ bei den in ihren Enden eingespannten, übrigens belastungsfreien Holmen erzeugt werden.

Deutet man mit y_1^0 und y_2^0 die Durchbiegungen an, welche auftreten, wenn die Kräfte X den Wert Null haben und die Holme also nur mit p resp. $-p$ belastet sind, und mit y_1^1 und y_2^1 die Durchbiegungen, welche auftreten, wenn die Holme mit einer Einheitskraft in ihrem freien Ende belastet und übrigens kräftefrei sind, so kann die Gl. (VI) wie folgt geschrieben werden:

$$X b_l - (S_{1t} + S_{2t})\left(\frac{y_1^0 - X y_1^1 - y_2^0 - X y_2^1}{b}\right)' = 0$$

$$X\left\{ b_l + (S_{1t} + S_{2t})\left(\frac{y_1^1 + y_2^1}{b}\right)'_{x=l} \right\} - (S_{1t} + S_{2t})\left(\frac{y_1^0 - y_2^0}{b}\right)'_{x=l} = 0.$$

Mit Hilfe des aus dieser Gleichung gefundenen X-Wertes können dann:

$$y_1 = y_1^0 - X y_1^1 \qquad \text{und} \qquad y_2 = y_2^0 + X y_2^1$$

bestimmt werden.

7. Ueber die Anzahl und die Wahl der Funktionen p. Nach den beim Durchrechnen von Zahlenbeispielen gemachten Erfahrungen genügt es für praktische Zwecke vollständig, wenn man vier geeignete Belastungen p annimmt und dazu die Belastungsfunktionen p bestimmt, aus welchen man in der in Nr. 6 angedeuteten Weise die vorgegebene Flügelbelastung $q_1 - q_1$, $q_2 - q_2$ aufbaut.

Als erste p-Funktion p_1 nimmt man zweckmäßig eine konstante, deren Größe aus der Bedingung

$$\int_0^l p_1\, dx = \int_0^l (q_1 - q)\, dx$$

folgt; die weiteren Funktionen wählt man vom 1., 2., 3. Grad und zwar solcherweise, daß die von jeder herrührende Gesamtbelastung null wird. Diese Handlungsweise findet ihre Begründung in der folgenden Ueberlegung.

Hätte man die freie Wahl über die Funktionen p, so läge es auf der Hand $p_1 =$ konstant, so zu bestimmen, daß:

$$\int_0^l p_1\, dx = \int_0^l (q_1 - q)\, dx$$

und $p_2, p_3, p_4 \ldots$ derart zu wählen, daß

$$\int_0^l p_2\, dx; \qquad \int_0^l p_3\, dx; \ldots$$

null würden. Die Funktionen p_2, p_3, p_4 würden dann nur dazu dienen, die erforderlichen Belastungsverschiebungen an der Holmlänge entlang zu Stande zu bringen.

Die Funktionen p kommen aber erst auf indirektem Wege, nämlich nachdem die Funktionen $\bar{p}$ angenommen sind, zum Vorschein. Man legt deshalb, obwohl damit der für die Funktionen p erzielte Zweck nicht vollständig erreicht wird, bei der Wahl der Funktionen $\bar{p}$ den für die erstgenannten Funktionen entwickelten Leitsatz zugrunde und setzt:

$$\begin{aligned}
\bar{p}_1 &= 1 \\
\bar{p}_2 &= 1 - 2\,(x/l) \\
\bar{p}_3 &= 1 - 6\,(x/l) + 6\,(x/l)^2 \\
\bar{p}_4 &= 1 - 12\,(x/l) + 30\,(x/l)^2 - 20\,(x/l)^3
\end{aligned}$$

8. Die Kraftübertragung der beiden Holme. Der vorgeführte Gedankengang ermöglicht es, einen richtigen Einblick in die Verbundwirkung der beiden Holme zu gewinnen. Weil in der Einklemmstelle des Flügels der Verdrehungswinkel φ sowie seine Ableitung null ist, so können in den Holmeinklemmquerschnitten A und B keine Torsionsmomente auftreten. Der auf dem Flügel stehenden Belastung muß also durch in A und B angreifende Querkräfte und Biegungsmomente das Gleichgewicht gehalten werden. Zur Bestimmung der in A wirkenden Querkraft bestimmt man das statische Moment aller auf den Flügel wirkenden Kräfte und Momente in bezug auf die Achse des zweiten Holmes. Von den Reaktionsgrößen liefert nur die gesuchte Querkraft ein Moment.

Bedenkt man außerdem, daß die äußere Belastung nach Nr. 4 statisch ersetzt werden kann durch die kontinuierliche Belastung q_1 auf dem ersten Holme und q_2 auf dem zweiten Holme, so zeigt es sich, daß die in A wirkende Querkraft bis auf das Zeichen gleich der über die Länge l integrierten Belastung q_1 ist.

Genau dieselbe Querkraft wäre aufgetreten, wenn die Flügelbelastung mit Hilfe von einfach auf den Holmen gelagerten Rippen auf diese übertragen gewesen wäre. Die Verbundswirkung der Rippen trägt also im Total nicht das geringste zu einer Belastungsübertragung von dem einen Holm auf den anderen bei. Wohl aber tritt eine Verschiebung der auf jeden Holm wirkenden Kräfte auf, verursacht durch die von den Rippen auf die Holme ausgeübten, kontinuierlich verteilten Vertikalkräfte und durch die an den Holmenden auftretenden Einzelkräfte. Für jeden Holm ist die Summe der genannten Kräfte Null.

9. Sonderfälle. Während die vorangehende Methode für den betrachteten allgemeinen Fall wohl die einzig praktisch brauchbare ist, ist für den einfachen Fall, wo zwischen den Trägheitsmomenten der beiden Holme für alle x-Werte ein festes Verhältnis besteht oder die Holme gar prismatisch sind, eine starke Vereinfachung möglich.

Im ersten Falle nämlich, wo $S_{2b} = c S_{1b}$ ist (S_{2b} und S_{1b} aber von x abhängig sind), erhält man durch einfache Umformung der Gleichungen II:

$$\begin{aligned}
&S_{1b}\,(y_1'' + c\,y_2'')'' = q_1 + q_2\,, \\
&\{S_{1b}\,(y_1'' - y_2'')\}'' = q_1 - q_2/c + r\,(1 + 1/c)\,(y_1 - y_2)'' + \\
&\qquad + s\,(1 + 1/c)\,(y_1 - y_2)' + t\,(1 + 1/c)\,(y_1 - y_2)
\end{aligned}$$

oder mit den neuen Variabelen:

$$y_1 + c\,y_2 = y_3\,; \qquad y_1 - y_2 = y_4$$

und

$$1 + 1/c = d$$

$$\left.\begin{aligned}
(S_{1b}\,y_3'')'' &= q_1 + q_2 \\
(S_{1b}\,y_4'')'' &= q_1 - q_2/c + r\,d\,y_4'' + s\,d\,y_4' + t\,d\,y_4
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(VII)}.$$

Die schon in den Nr. 5 und 6 besprochenen Randbedingungen bleiben ungeändert und lauten in den neuen Variabelen:

$$x = 0, \quad y_3 = 0; \quad x = 0, \quad y_3' = 0; \quad x = l, \quad y_3'' = 0, \quad x = l, \quad y_3''' = 0.$$

$$x = 0, \quad y_4 = 0, \quad x = 0, \quad y_4' = 0, \quad x = l, \quad y_4'' = 0,$$

$$x = l\,, \quad (S_{1b}\,y_4'')' = (1 + 1/c)\,\frac{S_{1t} + S_{2t}}{b}\left(\frac{y_4}{b}\right)'.$$

Die erste der Gleichungen VII ist identisch mit Gleichung III. Die zweite kann aus den Gleichungen IV abgeleitet werden. Auch hier wird das Problem also im Wesen auf ein Biegungs- und Torsionsproblem zurückgeführt.

Die erste Gleichung VII läßt sich, auch im allgemeinen Falle, wo S_{1b} und q nicht konstant sind, mit Hilfe bekannter Methoden numerisch oder graphisch behandeln.

Die zweite Gleichung kann, im Falle des vorliegenden Problems, näherungsweise mittels eines Iterationsverfahrens gelöst werden. Man betrachtet sie dabei als die Gleichung eines einseitig eingespannten Stabes, dessen Belastung aus drei Teilen zusammengesetzt ist und zwar aus: erstens $q_1 - \frac{q_2}{c}$ (»äußerer Belastung«), zweitens der von den Randbedingungen herstammenden Querkraft am Ende des Stabes (»Verbundbelastung 1«) und drittens der Belastung $r\,d\,y_4'' + s\,d\,y_4' + d\,y_4$ (»Verbundbelastung 2«). Bei Durchrechnung von einfachen Fällen, wie z. B. von dem in Nr. 11 zu behandelnden, stellte sich heraus, daß die Verbundbelastung 1 einen großen Einfluß hat, daß dagegen der Verbundbelastung 2 geringere Bedeutung zukommt. Als erste Annäherung darf man also diese letzte Belastung fortlassen, so daß die Differentialgleichung übergeht in:

$$(S_{1b}\,y_{41}'')' = q_1 - \frac{q_2}{c},$$

während die Randbedingungen ungeändert bleiben. Zur Lösung dieser Gleichung bestimmt man die elastischen Linien für die gegebene äußere Belastung und für eine Verbundbelastung 1 von angenommener Einheitsgröße getrennt, was wieder nach bekannten Methoden möglich ist. Die wirkliche Größe X der Verbundbelastung wird prinzipiell in der in Nr. 6 angegebenen Weise bestimmt mit Hilfe von der Randbedingung:

$$(S_{1b}\,y_{41}'')' = \left(1 + \frac{1}{c}\right) \frac{S_1 t + S_2 t}{b} \left(\frac{y_{41}}{b}\right)'$$

(in welcher y_{41} die resultierende erste Näherungslösung bedeutet). Zur Bestimmung der zweiten Annäherung setzt man jetzt die Werte von y_{41} und ihren Ableitungen zur Berechnung der Verbundbelastung 2 in die zweite Gleichung VII ein und bestimmt nach derselben Methode, eine zweite Lösung y_{42}. In dieser Weise fährt man fort, bis die erwünschte Genauigkeit erreicht ist.

In den einfachen Fällen, die nach diesem Verfahren durchgerechnet wurden, zeigte es sich, daß die erste Näherungslösung y_{41} schon ziemlich genau war und daß die zur zweiten Annäherung einzuführende Verbundbelastung 2 wirklich den Charakter einer Korrektion hatte.

10. Fortsetzung. Noch größere Vereinfachung tritt ein, wenn man die Holme als prismatisch voraussetzt und auch die Größen b und q für die ganze Flügellänge als konstant annimmt. Die Steifigkeitsfaktoren und Belastungen der beiden Holme können dabei verschieden sein. Alle Koeffizienten der Gleichungen, die im allgemeinen Falle als Funktionen von x angesehen wurden, werden nun Konstanten, so daß eine Lösung in geschlossener Form möglich wird. Dieser Fall möge technisch weniger Interesse haben, da freitragende Flügel durchweg mit stark verjüngten Holmen gebaut werden, anderseits bietet er, der einfachen Lösung wegen, ein bequemes Hilfsmittel zum Studium des Charakters der Verbundwirkung.

Die Gleichungen VII reduzieren sich zu:

$$S_{1b}\,y_3'''' = q_1 + q_2, \quad S_{1b}\,y_4'''' = q_1 - \frac{q_2}{c} + r\,d\,y_4''$$

oder mit:

$$\frac{q_1}{S_{1b}} = Q_1\,; \quad \frac{q_2}{S_{1b}} = Q_2\,; \quad \frac{r}{S_{1b}} = \frac{S_{1t} + S_{2t}}{S_{1b}\,b^2} = \frac{2\,A}{b^2}$$

zu:

$$y_3'''' = Q_1 + Q_2, \quad y_4'''' - \left(1 + \frac{1}{c}\right)\frac{2\,A}{b^2}\,y_4'' = Q_1 - \frac{Q_2}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VIII)}$$

Die Randbedingung, welche die Verbundbelastung 1 bestimmt, wird:

$$x = l, \; y_4''' = \left(1 + \frac{1}{c}\right)\frac{2\,A}{b^2}\,y_4'$$

die übrigen Randbedingungen bleiben ungeändert.

Nimmt man zur Durchrechnung eines einfachen Beispieles an, daß nur ein Holm belastet wird und zwar derart, daß $Q_1\,l^3 = 1$ ist und stellt man:

$$\frac{x}{l} = \bar{x}; \quad \frac{b}{l} = \bar{b}\,; \quad \frac{y_3}{l} = \bar{y}_3\,; \quad \frac{y_4}{l} = \bar{y}_4\,,$$

so sind die mit den Randbedingungen verträglichen Lösungen:

$$\bar{y}_3 = \frac{1}{24}\bar{x}^4 + C_1\bar{x}^3 + C_2\bar{x}^2, \qquad \bar{y}_4 = C_3 + C_4\bar{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^2}\bar{x}^2 + C_5 e^{\lambda\bar{x}} + C_6 e^{-\lambda\bar{x}}$$

wo:

$$\lambda = \frac{l}{b}\sqrt{\left(1+\frac{1}{c}\right)2\,A}; \qquad C_1 = -\frac{1}{6}; \qquad C_2 = +\frac{1}{4};$$

$$C_3 = -\frac{\lambda(e^{\lambda}-e^{-\lambda})+2}{\lambda^4(e^{\lambda}+e^{-\lambda})}; \qquad C_4 = +\frac{1}{\lambda^2}; \qquad C_5 = +\frac{1-\lambda e^{-\lambda}}{\lambda^4(e^{\lambda}+e^{-\lambda})}; \qquad C_6 = +\frac{1+\lambda e^{\lambda}}{\lambda^4(e^{\lambda}+e^{-\lambda})}$$

Die Unbekannten $\bar{y} = \frac{y_1}{l}$ und $\bar{y}_2 = \frac{y_2}{l}$ berechnet man mit Hilfe der Beziehungen:

$$\bar{y}_1 = \frac{\bar{y}_3 + c\,\bar{y}_4}{1+c}, \qquad \bar{y}_2 = \frac{\bar{y}_3 - \bar{y}_4}{1+c}.$$

Durch die Verbundwirkung beider Holme wird das Einklemm-Moment, welches bei dem freien ersten Holme auftreten würde, $(S_{1b}\,y_{10}'')_{x=0}$ verringert zu $(S_{1b}\,y_1'')_{x=0}$. Das Verhältnis dieser beiden Werte kann als ein Maß für die Verbundwirkung der Flügelkonstruktion angesehen werden. In Abb. 3 ist dieses Verhältnis als Funktion der beiden, das Problem beherrschenden Konstanten λ und c, und zwar für die in der Praxis vorkommenden Werte, eingetragen. Man liest aus dieser Figur ab, daß die Verbundwirkung am günstigsten für denjenigen Holm ausfällt, welcher die kleinste Biegungssteifigkeit hat.

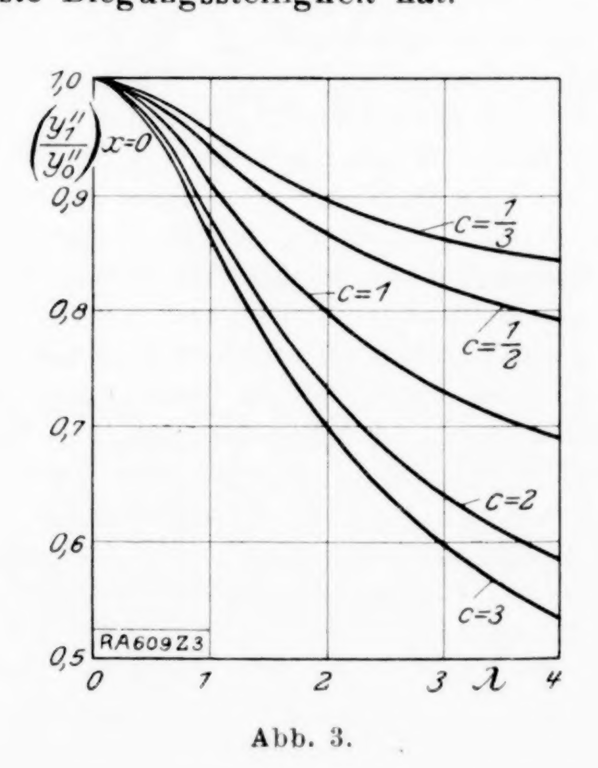


Abb. 3.

Abb. 4.

11. Zahlenbeispiel.

Für den speziellen Fall $\lambda = 2$, $c = 1$ sind in Abb. 4 auf der Flügellänge als Abszisse die zweiten Ableitungen der Holmdurchbiegungen eingetragen und zwar sowohl für den Fall ohne Verbundwirkung $(\bar{y}_{10}'')$ als für denjenigen mit Verbundwirkung $(\bar{y}_1''$ und $\bar{y}_2'')$. Zum Vergleich der Verbundbelastungen 1 und 2 (siehe Nr. 9) wurde auch die Linie $(1-\bar{x})\,\bar{y}_2'''_{(\bar{x}=1)}$, welche den Verlauf des von der Verbundbelastung 1 herstammenden Momentes angibt, eingetragen. Der Einfluß der Verbundbelastung 1 ist, wie schon in Nr. 9 bemerkt wurde, weitaus der wichtigste. Die am Flügelende übertragene Querkraft beträgt 0,110 von der totalen Belastung.

12. Schlußbemerkung.

Es sei noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die in Nr. 9, 10 und 11 gemachten Schlußfolgerungen sich nur auf den dort behandelten einfachen Fall beziehen. Für den allgemeinen Fall muß auf die zuerst entwickelte Methode zurückgegriffen werden. Für den ersten Fall hat das Iterationsverfahren unbedingt den Vorteil, daß es schneller zum Ziele führt, weil, wie gezeigt wurde, sehr wenig Iterationen genügen. Für den zweiten Fall dagegen verdient die erste Methode den Vorzug, weil diese sich von der unentschiedenen Frage der Konvergenz des Iterationverfahrens losmacht. Beide Methoden haben gemein, daß sie bei graphischer Behandlung nur die Kenntnis von der Mohrschen Konstruktion der elastischen Linie voraussetzen. 609

Die Verzerrungswellen in schweren Mitteln.

Von **KARL ULLER** in Gießen.

1. Einleitung. In der Bebenkunde[1]) ist man der Meinung, daß der Einfluß der Erdschwere auf die Bebenwellen durchweg vernachlässigbar sei. Mit Wellen in Mitteln, die irgend einem äußeren stationären Kraftfelde unterliegen, habe ich mich aus gewissen, rein theoretischen Gründen beschäftigen müssen. Dabei fand ich zu meiner Ueberraschung, daß eine der möglichen Wellen eine singuläre Form annehmen kann, die wesentlich durch das Kraftfeld bestimmt ist. Ich halte es daher für erforderlich, alle möglichen Wellen in verzerrfähigen Mitteln einheitlicher und allgemeiner als bisher darzustellen und die singuläre Form hervorzuheben. Ich rede dabei nicht von Elastizität und elastischen Wellen, sondern allgemeiner von Verzerrfähigkeit und Verzerrungswellen, weil dieselben Wellenformen bei Austausch gewisser Größen auch in Flüssigkeiten und Gasen vorkommen müssen. In der Darstellung bediene ich mich einiger kinematischer Gesetzmäßigkeiten[2]) in Wellen von elementarer Schwankungsform, die ebenso knapp wie durchgreifend sind. Eine solche Welle hat ganz allgemein die Gestalt

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{S} &= {}^1/_2 \left\{ \mathfrak{a} \cdot e^{i\,[\nu t - \Phi]} + \mathfrak{a}^* \cdot e^{-i\,[\nu^* t - \Phi^*]} \right\} \\ &= e^{-[\nu'' t - \Phi'']} \left\{ \mathfrak{a}' \cos\,[\nu' t - \Phi'] - \mathfrak{a}'' \sin\,[\nu' t - \Phi'] \right\}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1);$$

ein angehängtes Sternchen deutet den konjugiert komplexen Ausdruck an. In $\nu = \nu' + i\,\nu''$ treten die Frequenz ν' und die (positive oder negative) Dämpfung ν'' der Wellenerregung zusammen. Die Flächen $\Phi' =$ konst., und $\Phi'' =$ konst., die reine Ortsfunktionen sind, sollen die Phasenflächen bzw. die Amplitudenflächen angeben. Kann man in einem Wellenbereiche $\mathfrak{a}$ und grad $\Phi = \mathfrak{w}$ als konstant ansehen, so sprechen wir von einer Planwelle; in ihr sind die Φ-flächen zwei Systeme von Ebenen $(\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}) =$ konst, worin $\mathfrak{r}$ den Topographen bezeichnet. Die Planwelle gibt nur das Gröbste einer wirklichen Welle wieder. Diskrete Reihen von ausgezeichneten Werten $\mathfrak{S}$ pflanzen sich in ihr mit der gleichen Geschwindigkeit $\nu'/\mathfrak{w}'$ fort. Alle anderen Werte $\mathfrak{S}$ aber bleiben nur für einen Augenblick erhalten. Die Geschwindigkeit dieser Momentanwerte ist veränderlich und kann sogar gegen die Geschwindigkeit der Hauptwerte gerichtet sein. Die Tatsache, daß mindestens alle Hauptwerte mit der gleichen Geschwindigkeit fortwandern, erlaubt uns zwei oder drei Schwankungsstücke der Form (1) mit ($\nu'' < 0$; $\nu'' = 0$; $\nu'' > 0$) bei verschiedenem ν' und denselben Richtungen von $\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$ zusammen zu setzen. Indem wir uns die aneinanderstoßenden Stücke stetig ineinander übergehend denken, bekommen wir angenähert eine ansteigende, dann andauernde und dann wieder abfallende periodische Erregung mit dem entsprechenden Schwankungsbild einer Welle, wie es vielfach in der Akustik, Seismik und Elektrik auftritt. Nun sind im allgemeinen $\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$ schon in einer Planwelle von ν' und ν'' abhängig. Somit sind die Wellenlängen $2\,\pi/\mathfrak{w}'$ im Wellenbilde variabel, aber auch die Perioden im Diagramm an einem festen Ort. Letzteres beobachtet man in einem Erdbeben-Diagramm für eine durchlaufende Welle. Man kann aber aus den Perioden eines Diagramms nicht zuverlässig auf die Periode der Erregung schließen.

2. Die Grundgleichungen in einem festen, ruhenden Mittel unter dem Einfluß eines äußeren, stationären Feldes. Der stationäre Oberflächenzwang und das äußere stationäre Kraftfeld, das wir lamellar voraussetzen wie z. B. die Schwere, bewirken zusammen stationäre Spannungen und Verrückungen sowie Dichten, denen wir den Zeiger 0 geben. Diesem stationären Zustand, den wir stabil voraussetzen, überlagert sich die Welle. Die Eigenschaften des Mittels sind als Ortsfunktionen zu betrachten und als unabhängig von den veränderlichen Spannungen, die die Welle mit sich führt. Die Gesamtverschiebung aus dem natürlichen, spannungslosen Zustand heraus sei mit $\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}$, entsprechend die Spannung mit $\mathfrak{T}_0 + \mathfrak{T}$, die Dichte mit $D_0 + D$ und das äußere Potential, bezogen auf die Masseneinheit, mit $\Pi_0 + \Pi$ bezeichnet.

[1]) z. B. Math. Enzyklopädie VI, 1, 11, 427; auch Love, Some problems of geodynamics, Cambridge, University Press 1911, Kap. XI.

[2]) K. Uller, Grundlegung der Kinematik einer Welle von elementarer Schwingungsform I, Physikal. Zeitschrift Bd. 17, (1916), S. 168.

Die **Bewegungsgleichung** lautet nun für ein Massenelement $(D_0 + D)\, d\,v$ mit der Oberfläche $\mathfrak{f}$

$$(D_0 + D)\, \ddot{\mathfrak{S}} = \frac{1}{d\,v} \int d\,f\,(\mathfrak{T}_0 + \mathfrak{T}) + (D_0 + D) \text{ grad } (\Pi_0 + \Pi) \quad . \quad . \quad (1),$$

$$\text{wobei } \frac{1}{d\,v} \int d\,f\,\mathfrak{T}_0 + D_0 \text{ grad } \Pi_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1').$$

Aus der Theorie des Kontinuums folgt für die Spannungen[1]) in einem Flächenelement mit der Einheitsnormale $\mathfrak{n}$

$$\mathfrak{T}_0 + \mathfrak{T} = (\varepsilon_\vartheta - {}^2/_3\, \varepsilon_g) \operatorname{div} (\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}) \cdot \mathfrak{n} + 2\, \varepsilon_g\, (\mathfrak{n}\, \nabla)\, (\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}) + \varepsilon_g\, [\mathfrak{n} \operatorname{rot} (\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S})] \quad (2).$$

Hierin bezeichnet ε_ϑ den Volummodul $= E/3\,(1 - 2\,\mu)$ (Young-Poisson) $= \lambda + {}^2/_3\,\mu$ (Lamé), $1/\varepsilon_\vartheta$ die Kompressibilität und ε_g den Gestaltmodul oder die Riegheit $= E/\,2\,(1 + \mu)$ (Young-Poisson) $= \mu$ (Lamé); der Poissonschen Zahl $\mu = {}^1/_4$ entspricht $5\,\varepsilon_g - 3\,\varepsilon_\vartheta = 0$. Zeigt das Mittel Hysterese, infolge innerer Reibung, so läuft das darauf hinaus, daß die Größen ε_ϑ und ε_g komplex ausfallen in einem Felde von elementarer Schwankungsform[2]). Ferner verlangt die Kontinuität

$$D = - D_0 \cdot \operatorname{div} \mathfrak{S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die Teilchen erfahren, wenn die Welle durch sie hindurchläuft, aus dem stationären Felde heraus eine zeitlich veränderliche Verschiebung $\mathfrak{S}$ und geraten an einen, vom stationären Felde abweichenden benachbarten Ort ($\mathfrak{r}$), wo das Potential $\Pi_0 + \Pi$ herrscht. Das für das bewegte Teilchen in Betracht kommende Zusatz-Potential ist offenbar

$$\Pi = (\mathfrak{S} \text{ grad } \Pi_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Damit kommt, wenn wir nur lineare Glieder der zeitlich veränderlichen Größen beibehalten[3])

$$D_0\, \ddot{\mathfrak{S}} = \frac{1}{d\,v} \int d\,f\,\mathfrak{T} + D \text{ grad } \Pi_0 + D_0 \text{ grad } \Pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \frac{1}{d\,v} \int d\,f\,\mathfrak{T} = {} & (\varepsilon_\vartheta + {}^4/_3\, \varepsilon_g) \text{ grad div } \mathfrak{S} - \varepsilon_g \text{ rot rot } \mathfrak{S} \\ & - [\text{rot } \mathfrak{S}, \text{grad } \varepsilon_g] + 2\, (\text{grad } \varepsilon_g\, \nabla)\, \mathfrak{S} + \text{div } \mathfrak{S} \cdot \text{grad } (\varepsilon_\vartheta - {}^2/_3\, \varepsilon_g); \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

Es unterliege das **äußere Kraftfeld** der Bedingung $\text{div grad } (\Pi_0 + \Pi) = - 4\,\pi\,\gamma \cdot (D_0 + D)$, worin γ eine Konstante; in der Newtonschen Gravitationstheorie z. B. ist γ gleich der Gravitationskonstante $6{,}685 \cdot 10^{-8}$ gr.$^{-1}$ · cm.^{3} · sec.$^{-2}$. Die Größe des Potentials und seines Gradienten hängt natürlich von der Massenverteilung ab; sie ist jedenfalls proportional γ. Für das stationäre bzw. das veränderliche Spannungsfeld haben wir somit die Zusatzbedingungen

$$\text{div grad } \Pi_0 = - 4\,\pi\,\gamma\, D_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6);$$

$$\text{div grad } \Pi = - 4\,\pi\,\gamma\, D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6').$$

Gut ist es, daran zu denken, daß das Energieprinzip natürlich in unseren Grundgleichungen erfüllt ist. Erfüllt ist also der Satz: Die Vermehrung der kinetischen und elastischen Energie sowie die Hysteresiswärme innerhalb einer ruhenden Oberfläche ist jederzeit gleich der Leistung des äußeren Kraftfeldes und der Einströmung von Energie.

In einer Welle von elementarer Schwankungsform hat die **Spannung** wegen ihrer Linearität bezüglich der Verrückung entsprechend (1) in § 1 die Form

$$\mathfrak{T} = {}^1/_2\, \{ \mathfrak{t} \cdot e^{i\,[\nu\,t - \Phi]} + \mathfrak{t}^* \cdot e^{-i\,[\nu^*\,t - \Phi^*]} \} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Hiermit ist entsprechend einer früheren Veröffentlichung[4]) der zeitliche Mittelwert der **Energiestrahlung**

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{n} = - \overline{(\mathfrak{T}\, \dot{\mathfrak{S}})} - \overline{(\mathfrak{T}_0\, \dot{\mathfrak{S}})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

in einer Welle berechenbar. Von einer Energiebewegung längs der Phasennormale $\mathfrak{w}$ kann meist keine Rede sein.

---

[1]) K. Uller, Zurückwerfung und Brechung elastischer Wellen. Verhdlg. d. D. Phys. Ges. Nr. 16 (1914), S. 835.

[2]) —, Theorie der zyklischen Hysterese. Verhdlg. d. Deutsch Physik. Ges. Nr. 4 (1923), S. 31.

[3]) —, Grundlegung I. a. a. O.

[4]) —, Die Strahlung in einer Welle von elementarer Schwankungsform. Physik. Zeitschr. Bd. 17 (1916), S. 369.

3. Die Wellenzustandsgleichung für ein homogenes, ruhendes Mittel.

Wir betrachten D_0, ε_v und ε_g als konstant; wegen (6) im vorigen Abschnitt dürfen wir grad Π_0 nicht konstant setzen. Wenn wir nun von der Bewegungsgl. (5) daselbst die Rotation nehmen, um grad Π bequem loszuwerden, dann erhalten wir mit Rücksicht auf (3), wodurch die Kontinuität zum Ausdruck gelangt,

$$D_0 \operatorname{rot} \ddot{\mathfrak{S}} + \varepsilon_g \operatorname{rotrotrot} \mathfrak{S} - D_0 [\operatorname{grad} \Pi_0 \operatorname{graddiv} \mathfrak{S}] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Jetzt haben wir noch die Nebenbedingung (6′) zum Ausdruck zu bringen. Zu dem Zwecke nehmen wir von (5) die Divergenz und erhalten

$$D_0 \operatorname{div} \ddot{\mathfrak{S}} - (\varepsilon_v + {}^4/_3\, \varepsilon_g) \operatorname{divgraddiv} \mathfrak{S} - 8\,\pi\,\gamma\, D_0{}^2 \operatorname{div} \mathfrak{S} + D_0 (\operatorname{grad} \Pi_0, \operatorname{graddiv} \mathfrak{S}) = 0 \quad (2).$$

An der Wellenzustandsgleichung (1) und der Nebenbedingung (2), die beide für jede beliebige Ueberlagerung von Wellen gelten, ist es unmöglich zu erkennen, welcher Art Wellen möglich sind. Um das zu erfahren, muß man den Ausdruck für eine Welle einführen. Das wollen wir zunächst an der idealen Welle, der Planwelle, zeigen.

4. Die möglichen Wellen. Für eine Planwelle ($\mathfrak{a}$ = konst., grad $\Phi = \mathfrak{w}$ = konst.) kommt aus der Wellenzustandsgleichung (1) im vorigen Abschnitt

$$[\mathfrak{w}, \{ \varepsilon_g \mathfrak{w}^2 - \nu^2 D_0 \} \mathfrak{a} - i D_0 (\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}) \operatorname{grad} \Pi_0] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und aus der Nebenbedingung (2)

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}) \{ (\varepsilon_v + {}^4/_3\, \varepsilon_g) \mathfrak{w}^2 - (\nu^2 + 8\,\pi\,\gamma\, D_0) D_0 - i D_0 (\mathfrak{w} \operatorname{grad} \Pi_0) \} = 0 \quad . \quad . \quad (2).$$

Es muß demnach sein:

entweder $$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}) = 0 \text{ und } \{ \varepsilon_g \mathfrak{w}^2 - \nu^2 D_0 \} = 0; \; [\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}] \text{ beliebig} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3\text{a})$$

oder $$\left.\begin{array}{l} (\varepsilon_v + {}^4/_3\, \varepsilon_g) \mathfrak{w}^2 - (\nu^2 + 8\,\pi\,\gamma\, D_0) D_0 - i D_0 (\mathfrak{w} \operatorname{grad} \Pi_0) = 0 \\ \text{und } \eta\, \mathfrak{w} = \{ \varepsilon_g \mathfrak{w}^2 - \nu^2 D_0 \} \mathfrak{a} - i D_0 (\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}) \operatorname{grad} \Pi_0; \\ \eta \text{ beliebig, } ([\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}] \operatorname{grad} \Pi_0) = 0 \text{ und } (\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}) \text{ sowie } [\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}] \text{ vorgeschrieben} \end{array}\right\} \quad (3\text{b}).$$

Aus der zweiten Beziehung unter (3b) folgt durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{w}$

$$\left.\begin{array}{rl} (\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}) & = \dfrac{\eta\, \mathfrak{w}^2}{(\varepsilon_g \mathfrak{w}^2 - \nu^2 D_0) - i D_0 (\mathfrak{w} \operatorname{grad} \Pi_0)} \\ & = - \dfrac{\eta\, \mathfrak{w}^2}{(\varepsilon_v + {}^1/_3\, \varepsilon_g) \mathfrak{w}^2 - 8\,\pi\,\gamma\, D_0{}^2} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\text{a})$$

Damit wird

$$\mathfrak{a} = \eta \frac{\{ (\varepsilon_v + {}^1/_3\, \varepsilon_g) \mathfrak{w}^2 - 8\,\pi\,\gamma\, D_0{}^2 \} \mathfrak{w} - i D_0 \mathfrak{w}^2 \operatorname{grad} \Pi_0}{\{ \varepsilon_g \mathfrak{w}^2 - \nu^2 D_0 \} \cdot \{ (\varepsilon_v + {}^1/_3\, \varepsilon_g) \mathfrak{w}^2 - 8\,\pi\,\gamma\, D_0{}^2 \}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\text{b}).$$

Damit nun für endliche $\mathfrak{w}^2$ die Verrückungen nicht unendlich groß ausfallen können bei endlicher Erregung, müssen wir über die willkürliche Konstante η z. T. verfügen und schreiben

$$\mathfrak{a} = \sigma \left\{ \left\{ \frac{\varepsilon_v + {}^1/_3\, \varepsilon_g}{D_0} \mathfrak{w}^2 - 8\,\pi\,\gamma\, D_0 \right\} \mathfrak{w} - i\, \mathfrak{w}^2 \operatorname{grad} \Pi_0 \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Die Maßzahl von σ ist $\mathrm{gr}^{-1} \cdot \mathrm{cm.}^5 \cdot \mathrm{sec.}^2$.

Es sind also in einem schweren Mittel zwei Verzerrungswellen möglich, nicht mehr und nicht weniger, mit bestimmten Phasengefällen $\mathfrak{w}'$ und Amplitudengefällen $\mathfrak{w}''$ bei gegebenem Spreizwinkel zwischen beiden, also mit bestimmten Geschwindigkeiten und Verlöschungen. Es sind dies

a) Die reine Scherungswelle. Indem wir $\mathfrak{a} = \mathfrak{f}$ schreiben,

$$\mathfrak{S}_g = {}^1/_2 \{ \mathfrak{f} \cdot e^{i[\nu t - (\mathfrak{w}_g \mathfrak{r})]} + \mathfrak{f}^* \cdot e^{-i[\nu^* t - (\mathfrak{w}_g{}^* \mathfrak{r})]} \} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

mit $$(\mathfrak{f}\,\mathfrak{w}_g) = 0, \text{ also } \operatorname{div} \mathfrak{S}_g = 0; \; D = D_0 \text{ und } \mathfrak{w}_g{}^2 = \nu^2 D_0 / \varepsilon_g \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Auf ihren Bau ist das äußere Kraftfeld sowie die Volumelastizität und Volumviskosität ohne Einfluß.

Zur Berechnung der Spannungen finden wir mit (2) § 2

$$\mathfrak{t}_g = - i\, \varepsilon_g \{ (\mathfrak{n}\,\mathfrak{w}_g) \mathfrak{f} + (\mathfrak{n}\,\mathfrak{f}) \mathfrak{w}_g \} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Den Drehwinkel der Hauptverrückungsachsen mißt

$${}^1/_2 \operatorname{rot} \mathfrak{S}_g = {}^1/_4 \{ i [\mathfrak{f}\,\mathfrak{w}_g] \cdot e^{i[\nu t - (\mathfrak{w}_g \mathfrak{r})]} + \dots \} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

b) Die Verdünnungs-Scherungswelle. Indem wir $\mathfrak{a} = \mathfrak{s}$ schreiben

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{v}g} = {}^1/_2 \left\{ \mathfrak{s} \cdot e^{i[\nu t - (\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}\mathfrak{r})]} + \mathfrak{s}^* \cdot e^{-i[\nu^* t - (\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}^*\mathfrak{r})]} \right\} \quad \ldots \ldots (10).$$

mit

$$\mathfrak{s} = \sigma \left\{ \left\{ \frac{\varepsilon_{\mathfrak{v}} + {}^1/_3\, \varepsilon_g}{D_0} \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}^2 - 8\,\pi\,\gamma\, D_0 \right\} \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g} - i\, \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}^2 \operatorname{grad} \Pi_0 \right\} \quad \ldots (11).$$

Ferner haben wir nach (3b)

$$\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}^2 = \frac{D_0}{\varepsilon_{\mathfrak{v}} + {}^4/_3\, \varepsilon_g} \left\{ (\nu^2 + 8\,\pi\,\gamma\, D_0) + i\,(\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g} \operatorname{grad} \Pi_0) \right\} \quad \ldots (12)$$

und

$$([\mathfrak{s}\, \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}] \operatorname{grad} \Pi_0) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (13).$$

Die Beträge von $\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}'$ und $\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}''$ sind auch von ihrer Lage zu dem äußeren Kraftfeld abhängig, also auch die Geschwindigkeit und Verlöschung. Die Richtungen von $\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}'$ und $\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}''$ bezeichnen wir mit j' und j''.

Die relative Dichteschwankung $- D/D_0$ mißt

$$\operatorname{div} \mathfrak{S}_{\mathfrak{v}g} = {}^1/_2 \left\{ \delta \cdot e^{i[\nu t - (\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}\mathfrak{r})]} + \ldots \right\} \quad \ldots \ldots (14)$$

mit

$$\delta = -\, i\,(\mathfrak{s}\, \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}) = i\,\sigma \left\{ \varepsilon_g\, \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}^2 - \nu^2 D_0 \right\} \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}^2.$$

Ferner finden wir für den Drehwinkel der Hauptverrückungsachsen

$${}^1/_2 \operatorname{rot} \mathfrak{S}_{\mathfrak{v}g} = {}^1/_4 \left\{ i\,[\mathfrak{s}\, \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}] \cdot e^{i[\nu t - (\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}\mathfrak{r})]} + \ldots \right\} \quad \ldots \ldots (15).$$

mit

$$i\,[\mathfrak{s}\, \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}] = -\,\sigma\, \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}^2\, [\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g} \operatorname{grad} \Pi_0].$$

Schließlich ergibt sich zur Berechnung der Spannungen nach (7) § 2

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{t}_{\mathfrak{v}g} &= i\,\sigma\,(\varepsilon_{\mathfrak{v}} - {}^2/_3\, \varepsilon_g)\,(\varepsilon_g\, \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}^2 - \nu^2 D_0)\, \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}^2 \cdot \mathfrak{n} \\ &- i\,\sigma\,\varepsilon_g \left\{ 2 \left\{ \frac{\varepsilon_{\mathfrak{v}} + {}^1/_3\, \varepsilon_g}{D_0} \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}^2 - 8\,\pi\,\gamma\, D_0 \right\} (\mathfrak{n}\, \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}) + i\, \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}^2\, (\mathfrak{n} \operatorname{grad} \Pi_0) \right\} \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g} \\ &- \sigma\,\varepsilon_g\, \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}^2\, (\mathfrak{n}\, \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}) \operatorname{grad} \Pi_0 \end{aligned}\right\} \quad (16).$$

In dieser Welle beeinflußt nach (14) und (12) das äußere Kraftfeld die Volumänderungen und bewirkt nach (15) Drehungen und damit verbundene Gestaltänderungen — daher die Doppelzeiger $\mathfrak{v}$ und g —, wobei es nicht gleichgültig ist, ob die Welle im spitzen oder im stumpfen Winkel zu dem Kraftfelde läuft.

Selbst wenn das Mittel hysteresefrei ist und die Welle ungedämpft, kann nach (12), falls $\operatorname{grad} \Pi_0 \neq 0$, im allgemeinen die Amplitudennormale $\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}''$ nicht verschwinden. Unter dem Einfluß des äußeren Kraftfeldes zeigt diese Welle in dem konservativen Mittel die Verlöschung $e^{(\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}''\mathfrak{r})}$!

Hier haben wir einen neuen Beweis dafür, daß in der Wellenkinematik der genannte Faktor keineswegs charakteristisch ist für Energieverschluckung in einer Welle. Ferner ergibt sich aus dem Auftreten von $\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}''$, daß nach (11) — man bilde $[\mathfrak{s}\, \mathfrak{s}^*]$, was $\neq 0$ gefunden wird — die Schwingung fast immer spiral-elliptisch ist, und deshalb selbst in einem konservativen Mittel und in ungedämpfter Welle die Energiebewegung so gut wie nie parallel der Phasennormale $\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}'$ vor sich geht.

Lösen wir (12) auf, so finden wir für ein hysteresefreies Mittel

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}'^2 - \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}''^2 &= \frac{D_0}{\varepsilon_{\mathfrak{v}} + {}^4/_3\, \varepsilon_g} \left\{ \nu'^2 - \nu''^2 + 8\,\pi\,\gamma\, D_0 - (\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}'' \operatorname{grad} \Pi_0) \right\} \\ 2\,(\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}'\, \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}'') &= \frac{D_0}{\varepsilon_{\mathfrak{v}} + {}^4/_3\, \varepsilon_g} \left\{ 2\,\nu'\,\nu'' + (\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}' \operatorname{grad} \Pi_0) \right\} \end{aligned}\right\} \quad (12').$$

Bildet die Phasennormale $\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}'$ in einer ungedämpften Welle ($\nu'' = 0$) mit $\operatorname{grad} \Pi_0$ einen spitzen bzw. einen stumpfen Winkel, dann bildet auch die Amplitudennormale $\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}''$ mit $\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}g}'$ einen spitzen bzw. einen stumpfen Winkel. Nun nehmen bei einem spitzen Winkel die Amplituden in Richtung der Welle zu, bei einem stumpfen ab. Mit Rücksicht auf das oben als erfüllt betonte Energieprinzip können wir daher bestimmt aussagen, daß beim Verlauf unserer ungedämpften Welle im spitzen Winkel zur Richtung eines örtlich wenig variierenden, äußeren Kraftfeldes die Wellenenergie sich zusammendrängt, bei stumpfem Winkel sich verflacht.

In einer Welle, die einer ansteigenden — andauernden — abfallenden periodischen Erregung entspricht (siehe § 1), ist — wenn sie das Kraftfeld quer

durchläuft $[(\mathfrak{w}_{\vartheta g}' \operatorname{grad} \Pi_0) = 0]$ — nach (12') $(\mathfrak{w}_{\vartheta g}' \mathfrak{w}_{\vartheta g}'')$ negativ in der Front, positiv im Rücken der Welle. Gegen Front und Rücken fällt deshalb die Stärke dieser Welle sich verflachend ab.

Wenn $(\mathfrak{w} \operatorname{grad} \Pi_0) = 0$, also wenn $\mathfrak{w}_{\vartheta g}'$ und $\mathfrak{w}_{\vartheta g}''$ beide in einer Niveaufläche $\Pi_0 =$ konst. liegen, beeinflußt nach (12) das äußere Kraftfeld die Geschwindigkeit und Verlöschung der Welle nur insofern, als $\nu^2 + 8 \pi \gamma D_0$ statt ν^2 auftritt; insbesondere zeigt dann eine ungedämpfte Welle in einem konservativen Mittel ausnahmsweise keine Verlöschung.

Wenn $\mathfrak{w}_{\vartheta g}^2 = 8 \pi \gamma D_0^2 / (\varepsilon_\vartheta + {}^1/_3\, \varepsilon_g)$, also wenn nach (12) $-i (\mathfrak{w}_{\vartheta g} \operatorname{grad} \Pi_0) = \nu^2 - \frac{\varepsilon_g}{D_0} \mathfrak{w}_{\vartheta g}^2$, dann ist nach (11) $\mathfrak{s} = - i \sigma \mathfrak{w}_{\vartheta g}^2 \operatorname{grad} \Pi_0$, dann schwingen also die Verrückungen geradlinig, und zwar parallel dem äußeren Kraftfelde. Man erkennt, daß dies nur möglich ist bei bestimmten Werten von $(\mathfrak{j}' \operatorname{grad} \Pi_0)$ und $(\mathfrak{j}'' \operatorname{grad} \Pi_0)$. Man bilde weiter $[\mathfrak{s}\, \mathfrak{s}^*] = 0$ im Hinblick auf (11). Man erkennt, daß außer dem genannten Falle das Feld nur dann strichpolarisiert ist, wenn $\mathfrak{w}_{\vartheta g}^2$ nicht verschwindet und $([\mathfrak{w}_{\vartheta g}\, \mathfrak{w}_{\vartheta g}^*] \operatorname{grad} \Pi_0) = 0$ ist, also $\mathfrak{w}_{\vartheta g}'$, $\mathfrak{w}_{\vartheta g}''$ und $\operatorname{grad} \Pi_0$ komplanar sind oder je zwei der drei Größen zusammenfallen.

Bildet man aus (11) $\mathfrak{s}^2 = 0$, so findet man mit (12), daß in ungedämpfter Welle Kreisbahnen der Teilchen unendlich vielfach möglich sind, auch ohne Orthogonalität und Gleichheit von $\mathfrak{w}_{\vartheta g}'$ und $\mathfrak{w}_{\vartheta g}''$, aber unabhängig von der Lage von $\mathfrak{w}_{\vartheta g}$ zu $\operatorname{grad} \Pi_0$.

Volum- ohne Gestaltänderungen finden statt, wenn nach (15) $[\mathfrak{w}_{\vartheta g} \operatorname{grad} \Pi_0]$ verschwindet, was voraussetzt, daß die Welle einfach ist $([\mathfrak{w}'\, \mathfrak{w}''] = 0)$ und die Fortpflanzungsrichtung parallel liegt dem äußeren Kraftfelde. Nach dem vorangegangenen ist dann das Feld strichpolarisiert.

Gestalt- ohne Volumänderungen finden statt, wenn nach (14) $\mathfrak{w}_{\vartheta g}^2 = \nu^2 D_0 / \varepsilon_g = \mathfrak{w}_g^2$, die Welle also zufällig die Geschwindigkeit und Verlöschung der reinen Scherungswelle hat, was nach (12) eintritt, wenn $i (\mathfrak{w}_{\vartheta g} \operatorname{grad} \Pi_0) = \frac{\varepsilon_\vartheta + {}^1/_3\, \varepsilon_g}{\varepsilon_g} \nu^2 - 8 \pi \gamma D_0$ ist.

Wir setzen $\mathfrak{w}_{\vartheta g} = \mathfrak{p} \sqrt{\mathfrak{w}_{\vartheta g}^2}$, worin $\mathfrak{p}$ als die komplexe Richtung von $\mathfrak{w}_{\vartheta g}$ bezeichnet werden kann, mit $\mathfrak{p}^2 = 1$. Die geschweifte Klammer in (12) für $\mathfrak{w}_{\vartheta g}^2$ besteht aus zwei Gliedern. Ist das zweite Glied klein gegen das erste, ist also $|(\mathfrak{p} \operatorname{grad} \Pi_0)^2| \ll |(\nu^2 + 8 \pi \gamma D_0) (\varepsilon_\vartheta + {}^4/_3\, \varepsilon_g) / D_0|$, dann ist $\mathfrak{w}_{\vartheta g}^2$ wesentlich $= (\nu^2 + 8 \pi \gamma D_0) D_0 : (\varepsilon_\vartheta + {}^4/_3\, \varepsilon_g)$; in dem Gebiet der Welle, wo dies zutrifft, ist das Wellenstück nahezu eine Verdünnungswelle. Ist umgekehrt das zweite Glied groß gegen das erste, also $|(\mathfrak{p} \operatorname{grad} \Pi_0)^2| \gg |(\nu^2 + 8 \pi \gamma D_0) (\varepsilon_\vartheta + {}^4/_3\, \varepsilon_g) / D_0|$, dann ist $\mathfrak{w}_{\vartheta g}^2$ wesentlich $= - (\mathfrak{p} \operatorname{grad} \Pi_0)^2 D_0 : (\varepsilon_\vartheta + {}^4/_3\, \varepsilon_g)$, also $\mathfrak{w}_{\vartheta g}'$ und $\mathfrak{w}_{\vartheta g}''$ proportional dem äußeren Kraftfelde. Der Wellenbereich zeigt Verdünnungen und Scherungen, welch letztere aber verschwinden, wenn $\mathfrak{p}$ normal oder parallel zu $\operatorname{grad} \Pi_0$ liegt. — Heben beide Glieder in (12) sich auf, dann gelangen wir zu der singulären Form unseres Wellenbereiches, der wir uns jetzt zuwenden.

5. Die singuläre Form der Verdünnungs-Scherungswelle. Diese interessante und wichtige Form tritt nur auf in Gegenwart eines äußeren stationären Kraftfeldes, wie gering oder wie stark es auch sei. Wir wollen den Bestimmungsstücken dieser Wellenform den Zeiger s geben.

Wenn $$i (\mathfrak{w}_s \operatorname{grad} \Pi_0) = - (\nu^2 + 8 \pi \gamma D_0) \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

ist gemäß (12) $$\mathfrak{w}_s^2 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Dann liegen also $\mathfrak{w}_s'$ und $\mathfrak{w}_s''$ normal zueinander und sind von gleichem Betrage. Die Welle kann somit nicht einfach sein. Weiter ist nach (11)

$$\mathfrak{s} = - 8 \pi \gamma D_0 \sigma \cdot \mathfrak{w}_s \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Da also $\mathfrak{s}^2 = 0$, bewegen sich bei ungedämpfter Welle die Teilchen auf Kreisbahnen. Da ferner $(\mathfrak{s}\, \mathfrak{w}_s) = 0$ und $[\mathfrak{s}\, \mathfrak{w}_s] = 0$, so verschwinden nach (14) und (15) $\operatorname{div} \mathfrak{S}_s$ und $\operatorname{rot} \mathfrak{S}_s$, d. h. jedes Massenelement bewegt sich ohne Volumänderung und ohne Drehung der Hauptverrückungsachsen. Wie in einem idealflüssigen Mittel ohne Wirbel. Es ist aber Scherung vorhanden. Denn die scherende Energiedichte der Elastizität ist von null verschieden, nämlich ${}^1/_2\, \varepsilon_g \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathfrak{S}_s^2$.

Nach (16) ist $$\mathfrak{t}_s = i \sigma \varepsilon_g \cdot 8 \pi \gamma D_0 \cdot (\mathfrak{n}\, \mathfrak{w}_s)\, \mathfrak{w}_s \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Das Spannungsellipsoid ist wegen der Kreispolarisation ein Rotationsellipsoid mit der Drehachse parallel $[\mathfrak{w}_s'\, \mathfrak{w}_s'']$, und weil $\operatorname{div} \mathfrak{S}_s = 0$, ist die Summe der Hauptspannungen gleich null.

Die merkwürdigste Eigenschaft dieser singulären Wellenform ist die Unabhängigkeit ihrer Geschwindigkeit und Verlöschung von den elastischen und hysteretischen Eigenschaften des Mittels, wie aus (1) folgt. Diese Eigenschaften beeinflussen nur σ, also nur den Wellenvektor $\mathfrak{s}$.

Aus (1) und (2) folgt

$$|\mathfrak{w}_s'| = |\mathfrak{w}_s''| = \frac{\nu'^2 - \nu''^2 + 8\,\pi\,\gamma\,D_0}{(j''\,\mathrm{grad}\,\Pi_0)} = \frac{2\,\nu'\,\nu''}{(j'\,\mathrm{grad}\,\Pi_0)} \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Bei ungedämpfter Welle ($\nu'' = 0$) muß also sein

$$(j'\,\mathrm{grad}\,\Pi_0) = 0\,; \qquad |\mathfrak{w}_s'| = |\mathfrak{w}_s''| = \frac{\nu'^2 + 8\,\pi\,\gamma\,D_0}{(j''\,\mathrm{grad}\,\Pi_0)} \quad \ldots \ldots \quad (5').$$

Vorbedingung für ihre Singularität ist dann also, daß die Wellenphasen normal zum äußeren Kraftfeld laufen. Ihre Geschwindigkeit ist dann

$$\nu' / |\mathfrak{w}_s'| = \frac{\nu'}{\nu'^2 + 8\,\pi\,\gamma\,D_0}\,|j''\,\mathrm{grad}\,\Pi_0| \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

In der Tat ist das die Lösung von (12') allemal, wenn die Verdünnungs-Scherungswelle ungedämpft horizontal verläuft. Es sei daran erinnert, daß in der Oberflächenwelle einer Flüssigkeit ohne Kapillarität $\nu' / |\mathfrak{w}'| = g/\nu'$ gefunden wird, was mit obigem Wert fast übereinstimmt, da dann j'' parallel grad Π_0 liegt.

Ferner besteht die Verlöschung $e^{(\mathfrak{w}_s''\,\mathfrak{r})}$ und hat der Wellenvektor den Wert

$$\mathfrak{s}_s = -\,\sigma \cdot 8\,\pi\,\gamma\,D_0\,\frac{\nu'^2 + 8\,\pi\,\gamma\,D_0}{(j''\,\mathrm{grad}\,\Pi_0)}\,(j' + i\,j'') \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3').$$

Ist insbesondere auch $(j''\,\mathrm{grad}\,\Pi_0) = 0$, liegt also die $(\mathfrak{w}_s'; \mathfrak{w}_s'')$ Ebene in einer Niveaufläche $\Pi_0 =$ konst. oder existiert das äußere Kraftfeld überhaupt nicht, dann wird zwar $\mathfrak{s}_s = \infty$, die Verlöschung $e^{(\mathfrak{w}_s''\,\mathfrak{r})}$ aber null, so daß die Welle $\mathfrak{S}_s$ verschwindend klein ausfällt.

Zu beachten ist durchweg, daß wenn auch die Gravitationskonstante γ sehr klein ist, doch über die Größe σ in unserem Planwellenbereich keine Voraussetzung besteht, σ also sehr groß sein kann.

An unserer singulären Wellenform erkennt man in schöner Ausprägung, daß die stereotype Formel: »Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist gleich der Wurzel aus der Elastizität durch die Dichte« vollkommen illusorisch ist. Diese Formel bildet aber die Grundlage der bisherigen mathematischen Behandlung gekrümmter Strahlen in inhomogenen Mitteln!

Eine solche kreispolarisierte, hinsichtlich Geschwindigkeit und Verlöschung eigenschaftsunabhängige, singuläre Verzerrungswelle muß auch möglich sein in einem mit Elektronen und Magnetonen dichtbesetzten Mittel, das unter dem Einfluß eines elektrostatischen bzw. magnetostatischen Feldes steht; vermutlich aber auch für eine elektrische bzw. eine magnetische Welle.

6. Einfluß der Schwere auf die Erdbebenwellen. Die Bebenkunde glaubt aus der Ausdeutung ihrer Beobachtungen folgende Werte[1]) für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der »Longitudinal«- bzw. der »Transversalwelle« in der Erdkruste ($D_0 = 2{,}8$ gr/cm^3) verbürgen zu können: $\mathfrak{a} = 5{,}54 \cdot 10^5$ cm/sek.; $\mathfrak{b} = 3{,}2 \cdot 10^5$ cm/sek. Daraus berechnet sie $\lambda + 2\,\mu$ (Lamé) $= \varepsilon_v + {}^4/_3\,\varepsilon_g = \mathfrak{a}^2\,D_0 = 8{,}6 \cdot 10^{11}$ Dyn/cm^2 $= 8{,}8 \cdot 10^5$ kg/cm^2; μ (Lamé) $= \varepsilon_g = \mathfrak{b}^2\,D_0 = 2{,}9 \cdot 10^{11}$ Dyn/cm$^2 = 2{,}9 \cdot 10^5$ kg/cm^2; $\varepsilon_g/\varepsilon_v = {}^3/_5$, so daß μ (Poisson) $= {}^1/_4$. Was die Zeitperioden anbelangt, so sind solche von etwa 1 Sek. (in Nahebeben) beobachtet worden; in Oberflächenwellen treten aber auch solche bis zu 150 Sek. auf. Nehmen wir diese Grenzen, so liegen sie bei $\nu' = 2\,\pi/150 \simeq {}^1/_{25}$ und $\nu' = 2\,\pi \simeq 6$. Mit diesen Werten läßt sich zeigen, daß die zweite Wellenart ($\mathfrak{b}$) in § 4 als Erdbebenwelle eine Verdünnungswelle ist, begleitet mit schwachen Scherungen, herrührend von der Schwere. Damit dies sei, muß nach unserer Untersuchung in § 4 sein $g^2\,D_0 \ll \nu^2\,(\varepsilon_v + {}^4/_3\,\varepsilon_g)$, für $\nu' = 6$ also $10^6 \ll 10^{13}$ und für $\nu' = 4/100$ sein $10^6 \ll 5{,}10^8$, was beides erfüllt ist. Das Ergebnis gilt aber nur in gemessenem Abstand von der singulären Form der zweiten Wellenart und nur in der Erdkruste. 580

Gießen, im September 1925.

[1]) L. Gutenberg, Der Aufbau der Erdkruste. Zeitschrift f. Geophysik S. 95 (1925).

Ein spezieller Fall stationärer Flüssigkeitsströmung aus dem Gebiete der Wärmekonvektion.

Von **BERNHARD GÜNDEL** in Frankfurt a. M.

Der Verfasser dieser Ausführungen wurde in seiner Frankfurter Dissertation »Beiträge zur Frage der Wärmekonvektion«[1]) auf die Berechnung einer eigenartigen Strömungserscheinung geführt, die hier kurz mitgeteilt werden soll. Es handelt sich um einen speziellen Fall einer stationären Flüssigkeitsströmung, die infolge einer durch eine bestimmte Temperaturverteilung bewirkten Inkonstanz der Massendichte unter dem Einfluß der Schwerebeschleunigung zustande kommt, bei der also eine gleichzeitige Wirkung der Wärmeleitung und Wärmekonvektion vorliegt. Die das Problem der Wärmekonvektion beherrschenden Differentialgleichungen enthalten quadratische Glieder und sind daher der mathematischen Behandlung im Allgemeinen schwer zugänglich, nur bei einigen Fällen, bei denen die eine oder andere Differentialgleichung in trivialer Weise erfüllt wird, läßt sich eine exakte Lösung leicht gewinnen.

1. Die Grundgleichungen, von denen man auszugehen hat, sind die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\, \mathfrak{v}) = 0 ,$$

die Bewegungsgleichung einer Flüssigkeit mit innerer Reibung

$$\varrho \cdot \frac{d\, \mathfrak{v}}{d\, t} = \mathfrak{f} - \operatorname{grad} p + \lambda\, \Delta\, \mathfrak{v} + \frac{\lambda}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{v}$$

sowie die Wärmeleitungsgleichung, die für ein flüssiges oder gasförmiges Medium die Form

$$\frac{d\, \tau}{d\, t} = \mu\, \Delta\, \tau$$

annimmt. Hierin bedeuten:

$\mathfrak{v}$ den Geschwindigkeitsvektor der Flüssigkeit,
ϱ die Massendichte der Flüssigkeit,
$\mathfrak{f}$ den Vektor der auf die Flüssigkeit wirkenden Kraftdichte,
p den hydrostatischen Druck,
λ den Koeffizienten der Flüssigkeitsreibung,
τ die Temperatur,
μ den Temperaturleitungskoeffizienten.

Das Symbol $\frac{d}{d\,t}$ bezeichnet einen im bewegten Element gebildeten Differentialquotienten, $\frac{\partial}{\partial t}$ ortsfeste Differentiation. Für stationäre Strömungen erhält man vermöge der Relationen

$$\frac{d\, \mathfrak{v}}{d\, t} = \frac{\partial\, \mathfrak{v}}{\partial\, t} + (\mathfrak{v} \operatorname{grad})\, \mathfrak{v}\,, \qquad \frac{d\, \tau}{d\, t} = \frac{\partial\, \tau}{\partial\, t} + (\mathfrak{v} \operatorname{grad} \tau)$$

die Gleichungen

$$\operatorname{div}(\varrho\, \mathfrak{v}) = 0 ,$$

$$\mathfrak{f} - \operatorname{grad} p + \lambda\, \Delta\, \mathfrak{v} + \frac{\lambda}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{v} - \varrho\, (\mathfrak{v} \operatorname{grad})\, \mathfrak{v} = 0 ,$$

$$\mu\, \Delta\, \tau - (\mathfrak{v} \operatorname{grad} \tau) = 0.$$

Die Volumkraftdichte $\mathfrak{f}$ bestimmt sich als

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \cdot \varrho$$

($\mathfrak{g}$ = Vektor der Schwerebeschleunigung) und wird für Temperaturbereiche, innerhalb deren die Wärmeausdehnung stark angenähert linear mit der Temperatur verläuft

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \cdot \varrho_0\, [1 - \alpha\, (\tau - \tau_0)] ;$$

hierin ist ϱ_0 die Dichte der Flüssigkeit bei der festen Temperatur τ_0, α der kubische Wärmeausdehnungskoeffizient der Flüssigkeit. Für inkompressible Flüssigkeiten, bei denen

[1]) Ann. d. Phys. 78, S. 697 (1925).

die Dichte ϱ in ihren mechanischen Funktionen als Konstante zu betrachten ist, erhält man schließlich das simultane Gleichungssystem für $\mathfrak{v}$, τ und p:

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 \qquad (1),$$

$$\mathfrak{g}\, \varrho_0 [1 - \alpha(\tau - \tau_0)] - \operatorname{grad} p + \lambda\, \Delta\, \mathfrak{v} - \varrho_0 (\mathfrak{v} \operatorname{grad})\, \mathfrak{v} = 0 \qquad (2),$$

$$\mu\, \Delta\, \tau - (\mathfrak{v} \operatorname{grad} \tau) = 0 \text{ [1]} \qquad (3).$$

2. Wir behandeln nun im Zweidimensionalen die Strömungen mit nur vertikaler Geschwindigkeitskomponente, bei denen sich die quadratischen Differentialgleichungen (2) und (3) auf lineare reduzieren. Legt man ein kartesisches Koordinatensystem mit horizontal nach rechts gerichteter x-Achse und vertikal nach oben gerichteter y-Achse, so ist $g_x = 0$, $g_y = -g$, und unsere Differentialgleichungen lauten komponentiell geschrieben:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad (4),$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda\, \Delta\, v_x - \varrho_0 \left(v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = 0 \qquad (5),$$

$$-g\, \varrho_0 [1 - \alpha(\tau - \tau_0)] - \frac{\partial p}{\partial y} + \lambda\, \Delta\, v_y - \varrho_0 \left(v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0 \qquad (6),$$

$$\mu\, \Delta\, \tau - v_x \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} - v_y \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \qquad (7).$$

Fordert man nun $v_x \equiv 0$, so folgt aus (4)

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \qquad v_y = v(x);$$

dadurch wird $(\mathfrak{v} \operatorname{grad})\, \mathfrak{v} \equiv 0$ und Gl. (5) liefert

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad p = p(y);$$

mithin erhalten wir die Gleichungen

$$-g\, \varrho_0 [1 - \alpha(\tau - \tau_0)] - \frac{d\, p(y)}{d\, y} + \lambda \frac{d^2 v(x)}{d\, x^2} = 0 \qquad (8),$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}\right) - v(x) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \qquad (9).$$

Vermöge (8) muß τ in der Form

$$\tau = t(x) + u(y) + \tau_0 \quad \text{nebst} \quad t(0) = u(0) = 0$$

angebbar sein, vermittels der (9) in

$$\mu \frac{d^2 t(x)}{d\, x^2} + \mu \frac{d^2 u(y)}{d\, y^2} - v(x) \cdot \frac{d\, u(y)}{d\, y} = 0 \qquad (10)$$

übergeht und Gl. (8) in die folgenden zwei Differentialgleichungen aufgespalten wird:

$$g\, \varrho_0\, \alpha \cdot t(x) + \lambda \frac{d^2 v(x)}{d\, x^2} = 0 \qquad (11),$$

$$-g\, \varrho_0 + g\, \varrho_0\, \alpha\, u(y) - \frac{d\, p(y)}{d\, y} = 0 \qquad (12).$$

(10), (11) und (12) sind nun drei Differentialgleichungen für die vier Funktionen $p(y)$, $t(x)$, $u(y)$, $v(x)$; man sieht indessen unmittelbar, daß bei beliebigem Vorgeben einer derselben die vom Problem geforderten Abhängigkeitsverhältnisse der Funktionen p, t, u, v nicht gewahrt bleiben; $t(x)$ und $v(x)$ können nur dann von y unabhängig sein, wenn $\frac{d^2 u(y)}{d\, y^2} = 0$, also $\frac{d\, u}{d\, y} = C$, $u = C\, y$ ist. Hierzu liefert (12) unmittelbar

$$p = p_0 - g\, \varrho_0\, y + \frac{\gamma \cdot C}{2} \cdot y^2, \qquad \gamma = g\, \varrho_0 \cdot \alpha, \qquad \text{es wird} \quad \tau = \tau_0 + C\, y + t(x),$$

und für $t(x)$ und $v(x)$ gelten die Differentialgleichungen

$$\gamma\, t(x) + \lambda\, v''(x) = 0, \qquad \mu\, t''(x) - C\, v(x) = 0 \qquad (13).$$

3. Bei der Auflösung dieser Gleichungen empfiehlt es sich zu unterscheiden, ob C positiv, Null oder negativ ist.

[1]) Die Größen α, λ, μ werden im Folgenden als von der Temperatur unabhängig betrachtet, d. h. als Konstanten.

a) $C > 0$; dann führt eine einfache Rechnung zu folgender Lösung:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + C\,y + a\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\,x\cos\varepsilon\,x + b\,\mathfrak{Cof}\,\varepsilon\,x\sin\varepsilon\,x \\ v &= \frac{2\,\mu\,\varepsilon^2}{C}\{b\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\,x\cos\varepsilon\,x - a\,\mathfrak{Cof}\,\varepsilon\,x\sin\varepsilon\,x\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (14),$$

$$\varepsilon = \sqrt[4]{\frac{C\,\gamma}{4\,\lambda\,\mu}},$$

in der im Hinblick auf die zu betrachtenden Fälle die aus geraden Funktionen von x bestehenden Lösungsteile aus Symmetriegründen bereits unterdrückt sind. In dieser Lösung sind τ_0, C, a, b noch willkürliche Konstanten, die zu Erfüllung von Randbedingungen verwendet werden.

Mit Hilfe dieser Ausdrücke beschreiben wir die Strömung zwischen zwei vertikalen, im Abstand $2\,d$ parallelen Platten $x = +d$ und $x = -d$, an denen die Flüssigkeit haftet und die auf einer Temperatur gehalten werden, die durch

$\tau = \tau_1 + C\,y$ für $x = +d$, $\quad \tau = \tau_2 + C\,y$ für $x = -d$ nebst $C > 0$ gegeben ist[1]).

Die Lösung (14) liefert bei diesen Randbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{\mu\,\varepsilon^2\cdot(\tau_1-\tau_2)}{C\cdot(P^2+Q^2)}\{Q\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\,x\cos\varepsilon\,x - P\,\mathfrak{Cof}\,\varepsilon\,x\sin\varepsilon\,x\} \\ \tau &= \frac{\tau_1+\tau_2}{2} + C\,y + \frac{\tau_1-\tau_2}{2\,(P^2+Q^2)}\{P\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\,x\cos\varepsilon\,x + Q\,\mathfrak{Cof}\,\varepsilon\,x\sin\varepsilon\,x\} \end{aligned}\right\} \quad . \ (15),$$

worin

$$P = \mathfrak{Sin}\,\varepsilon\,d\cos\varepsilon\,d\,, \qquad Q = \mathfrak{Cof}\,\varepsilon\,d\sin\varepsilon\,d$$

gesetzt ist, der hydrostatische Druck ist $p = p_0 - g\,\varrho_0\,y + \frac{\gamma\cdot C}{2}\,y^2$.

Es ist dies ein in mancher Hinsicht eigenartiges Resultat, insofern als für hinreichend großes d die Geschwindigkeit v neben $x = 0$ und $x = +d$ auch innerhalb des Bereiches $0 \leq x \leq d$ [2]) Nullstellen besitzt, die im Allgemeinen mit Vorzeichenwechsel verbunden sind. v verschwindet nämlich für alle x_n, die der Relation

$$Q\cdot\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\,x_n\cdot\cos\varepsilon\,x_n - P\cdot\mathfrak{Cof}\,\varepsilon\,x_n\sin\varepsilon\,x_n = 0$$

$$\text{oder}\quad \frac{\mathfrak{Tg}\,\varepsilon\,x_n}{\operatorname{tg}\varepsilon\,x_n} = \frac{\mathfrak{Tg}\,\varepsilon\,d}{\operatorname{tg}\varepsilon\,d}$$

genügen. Wir betrachten also die Funktion $\frac{\mathfrak{Tg}\,\varepsilon\,x}{\operatorname{tg}\,\varepsilon\,x}$ (Abb. 1). Da $\mathfrak{Tg}\,\varepsilon\,x$ eine stetige Funktion ist, deren Wert für $x > 0$ stets zwischen 0 und 1 liegt, und $\frac{1}{\operatorname{tg}\varepsilon\,x} = \operatorname{ctg}\varepsilon\,x$ in jedem Bereich $k\,\pi < \varepsilon\,x < (k+1)\,\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ stetig ist und alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, nimmt der Quotient $\frac{\mathfrak{Tg}\,\varepsilon\,x}{\operatorname{tg}\,\varepsilon\,x}$ sicher in allen Bereichen $k\,\pi < \varepsilon\,x < (k+1)\,\pi$, in denen $\mathfrak{Tg}\,\varepsilon\,x > 0$ ist, alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ an, mithin in allen mit Ausnahme des Intervalles $0 < \varepsilon\,x < \pi$, da $\mathfrak{Tg}\,\varepsilon\,x$ für $x = 0$ verschwindet und $\frac{\mathfrak{Tg}\,\varepsilon\,x}{\operatorname{tg}\,\varepsilon\,x}$ für $x = 0$ den Wert 1 hat.

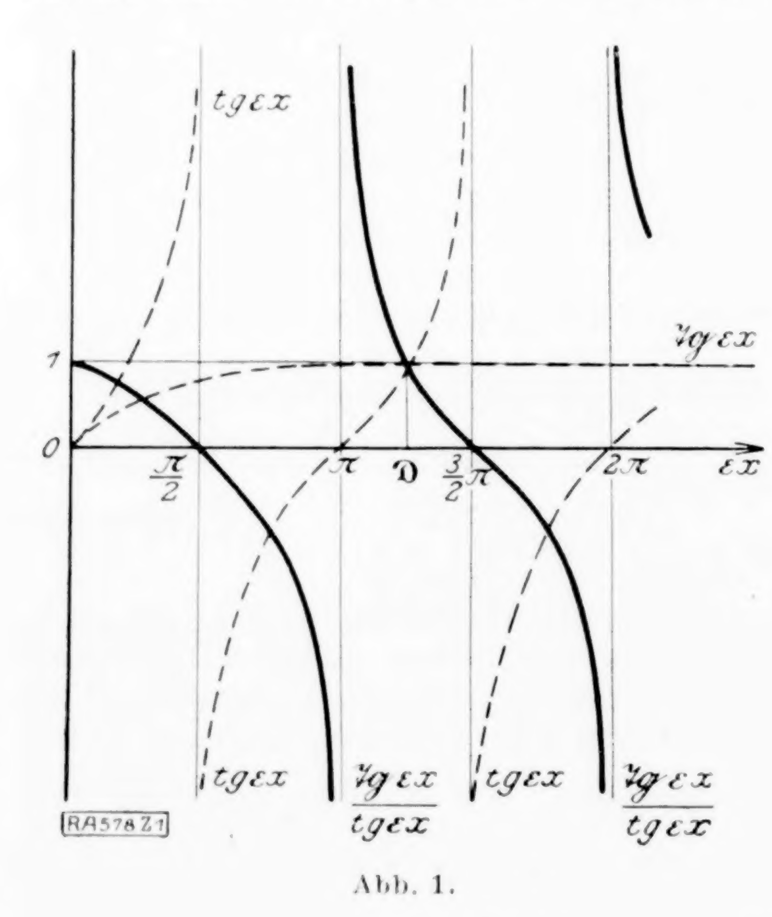


Abb. 1.

Nun verschwindet der Differentialquotient

$$\frac{d}{d\,x}\left(\frac{\mathfrak{Tg}\,\varepsilon\,x}{\operatorname{tg}\,\varepsilon\,x}\right) = -\,\varepsilon\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\,x\,\mathfrak{Cof}\,\varepsilon\,x - \sin\varepsilon\,x\cos\varepsilon\,x}{\mathfrak{Cof}^2\,\varepsilon\,x\cdot\sin^2\varepsilon\,x}$$

[1]) Dies ist physikalich eine Anordnung, die mit dem Ansatz einer in der Temperatur linearen Wärmeausdehnung u. ä. im Widerspruch steht, die aber dennoch in einer experimentellen Annäherung realisierbar sein dürfte, welche diesen Ansatz zuläßt.

[2]) Da die in v auftretenden Funktionen von x ungerade sind, genügt die Betrachtung für $x > 0$; Analoges gilt dann für $x < 0$.

für $x = 0$, wird für $x = k\pi$, $k = 1, 2, 3 \ldots$ negativ unendlich groß, und wegen

$$|\mathfrak{Sin}\,\varepsilon x| > |\sin \varepsilon x|, \qquad |\mathfrak{Cof}\,\varepsilon x| > |\cos \varepsilon x|, \qquad \mathfrak{Sin}\,\varepsilon x > 0, \qquad \mathfrak{Cof}\,\varepsilon x > 0$$

für $x > 0$ ist er durchweg für $x > 0$ negativ. Mithin ist $\frac{\mathfrak{Tg}\,\varepsilon x}{\operatorname{tg}\varepsilon x}$ eine in jedem Bereich $k\pi < \varepsilon x < (k+1)\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ monoton fallende Funktion, die in dem Intervall $0 \leq \varepsilon x \leq \pi$ jeden Wert von $+1$ bis $-\infty$, in jedem Intervall $k\pi \leq \varepsilon x \leq (k+1)\pi$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ jeden Wert von $+\infty$ bis $-\infty$ einmal und nur einmal annimmt.

Für hinreichend große d ist also die Bedingung

$$\frac{\mathfrak{Tg}\,\varepsilon x_n}{\operatorname{tg}\varepsilon x_n} = \frac{\mathfrak{Tg}\,\varepsilon d}{\operatorname{tg}\varepsilon d} \quad \text{für } 0 < x_n < d$$

mindestens einmal erfüllt und v hat in dem Bereich $0 < x < d$ mindestens eine Nullstelle. Für diese d berechnet sich also eine Strömung, die zwar stationär ist, indessen im Experiment kaum realisierbar sein und zu Wirbeln und instationären Verhältnissen führen dürfte. Die obere Grenze $D > 0$ des Bereiches für d, innerhalb dessen $\frac{\mathfrak{Tg}\,\varepsilon x}{\operatorname{tg}\varepsilon x}$ nie $\frac{\mathfrak{Tg}\,\varepsilon d}{\operatorname{tg}\varepsilon d}$ gleich wird, ist dadurch gegeben, daß

$$0 < \varepsilon D < \frac{3}{2}\pi \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{Tg}\,\varepsilon D}{\operatorname{tg}\varepsilon D} = 1 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Tg}\,\varepsilon D = \operatorname{tg}\varepsilon D$$

ist, d. h. εD ist die obere Grenze des ersten Intervalls, in dem $\frac{\mathfrak{Tg}\,\varepsilon x}{\operatorname{tg}\varepsilon x}$ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ einmal und nur einmal annimmt. Es sei $\mathfrak{Tg}\,\omega = \operatorname{tg}\omega$, wobei $\pi < \omega < {}^3/_2\,\pi$ ist, dann ist

$$D = \frac{\omega}{\varepsilon}, \qquad D = \omega \cdot \sqrt[4]{\frac{4\,\mu\,\lambda}{\gamma \cdot C}};$$

hierin ist ω eine feste, rein mathematische Größe von dem Zahlenwert $3{,}9266$ $(= {}^5/_4\,\pi - 0{,}0004)$; z. B. wird für Wasser[1]) bei Zimmertemperatur $\tau_0 = 15 - 20^0$ C

$$D = \frac{0{,}522}{\sqrt[4]{C}} \text{ cm},$$

für Olivenöl

$$D = \frac{1{,}027}{\sqrt[4]{C}} \text{ cm},$$

für Luft

$$D = \frac{1{,}634}{\sqrt{C}} \text{ cm}.$$

Je größer C ist, desto kleiner hat man offenbar d zu nehmen, um keine Turbulenz zu erhalten.

Wir bemerken noch, daß man für $d = \frac{\pi}{\varepsilon}$ und $d = \frac{\pi}{2\varepsilon}$ besonders einfache Formeln erhält; es wird für $d = \frac{\pi}{\varepsilon}$:

$$v = \frac{\mu \cdot \varepsilon^2 \cdot (\tau_1 - \tau_2)}{C \cdot \mathfrak{Sin}\,\pi} \cdot \mathfrak{Cof}\,\varepsilon x \sin \varepsilon x, \qquad \tau = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} + C y - \frac{\tau_1 - \tau_2}{2\,\mathfrak{Sin}\,\pi} \cdot \mathfrak{Sin}\,\varepsilon x \cos \varepsilon x,$$

für $d = \frac{\pi}{2\varepsilon}$:

$$v = \frac{\mu \cdot \varepsilon^2 \cdot (\tau_1 - \tau_2)}{C \cdot \mathfrak{Cof}\,\pi/2} \cdot \mathfrak{Sin}\,\varepsilon x \cos \varepsilon x, \qquad \tau = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} + C y + \frac{\tau_1 - \tau_2}{2\,\mathfrak{Cof}\,\pi/2} \cdot \mathfrak{Cof}\,\varepsilon x \sin \varepsilon x.$$

Ferner sei noch bemerkt, daß für

$$\tau_1 = \tau_2$$

v verschwindet; dies entspricht der Tatsache, daß eine horizontale Schichtung einer mit y linear zunehmenden Temperatur zu keiner Strömung führt, sondern eine stabile Ruhelage der Flüssigkeit bedingt.

[1]) Die Werte der Substanzkonstanten sind den Tabellen in Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Physik und Landolt-Börnstein, Tabellen entnommen.

b) $C = 0$ führt gemäß (13) zu dem einfachsten Fall

$$v = a\,x - \frac{\gamma A}{6\,\lambda}\,x^3, \qquad \tau = \tau_0 + A\,x, \qquad p = p_0 - g\,\varrho_0\,y.$$

Mit Hilfe dieser Lösung können wir die Strömung zwischen zwei vertikalen parallelen Platten von verschiedener, aber auf jeder derselben konstanten Temperatur darstellen. Die Ebenen mögen die Gleichungen $x = d$ und $x = -d$ haben, auf der ersteren herrsche die Temperatur τ_1, auf der letzteren τ_2. Die Berücksichtigung dieser Randbedingungen liefert:

$$v = \frac{\gamma \cdot d^2\,(\tau_1 - \tau_2)}{12\,\lambda} \cdot \left\{ \frac{x}{d} - \left(\frac{x}{d}\right)^3 \right\}, \qquad \tau = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} + \frac{\tau_1 - \tau_2}{2} \cdot \frac{x}{d}, \qquad p = p_1 - g\,\varrho_0\,y \quad (16).$$

v ist eine in x ungerade, für $\tau_1 > \tau_2$ im Bereich $0 < x < d$ positive Funktion, die für $x = \pm \frac{d}{3}\sqrt{3}$ den maximalen Betrag

$$v_{\max} = \frac{\gamma\,d^2\,(\tau_1 - \tau_2)}{54\,\lambda} \cdot \sqrt{3}$$

erreicht.

Da für alle Bereiche $-d \leq x \leq +d$ der von Substanzkonstanten freie Ausdruck

$$\left| \frac{x}{d} - \left(\frac{x}{d}\right)^3 \right| \leq \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

ist und den Wert $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ für $x = \pm \frac{d}{3}\sqrt{3}$ auch tatsächlich annimmt, gestattet der Faktor $\frac{\gamma\,d^2\,(\tau_1 - \tau_2)}{12\,\lambda}$ in (16) unmittelbar die Aussage, daß die Geschwindigkeit dem Quadrat des Plattenabstandes, der Temperaturspannung $(\tau_1 - \tau_2)$ und dem Produkt $\varrho_0\,\alpha$, d. h. der Substanzdichte und dem Wärmeausdehnungsfaktor, direkt, dem Faktor der inneren Reibung umgekehrt proportional ist.

c) $C = -C' < 0$ führt gemäß (13) zu

$$\gamma\,t\,(x) + \lambda\,v''\,(x) = 0, \qquad \mu\,t''\,(x) + C'\,v\,(x) = 0,$$

und es wird bei Beachtung von $t\,(0) = 0$ sowie der Symmetrieverhältnisse der hier in Rede stehenden Randbedingungen

$$\left\{ \begin{aligned} v &= \frac{\mu\,\delta^2}{C'}\,(b \sin \delta\,x - a\,\mathfrak{Sin}\,\delta\,x), \\ \tau &= \tau_0 - C'\,y + b \sin \delta\,x + a\,\mathfrak{Sin}\,\delta\,x \end{aligned} \right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (17),$$

$$\delta = \sqrt[4]{\frac{C'\,\gamma}{\lambda\,\mu}},$$

hierin sind a, b, C', τ_0 freie, für die Erfüllung von Randbedingungen zur Verfügung stehende Konstanten.

Mit Hilfe dieser Lösung beschreiben wir die Strömung einer Flüssigkeit zwischen zwei vertikalen, im Abstand $2\,d$ parallelen Platten $x = +d$ und $x = -d$, an denen die Flüssigkeit haftet und die auf einer Temperatur gehalten werden, die durch

$$\tau = \tau_1 - C'\,y \text{ für } x = +d, \qquad \tau = \tau_2 - C'\,y \text{ für } x = -d$$

nebst $C' > 0$ gegeben ist.

Die Lösung (15) liefert für diese Randbedingungen:

$$v = \frac{\mu\,\delta^2\,(\tau_1 - \tau_2)}{4\,C'} \cdot \left(\frac{\sin \delta\,x}{s} - \frac{\mathfrak{Sin}\,\delta\,x}{S} \right),$$

$$\tau = \tau_0 - C'\,y + \frac{\tau_1 - \tau_2}{4} \left(\frac{\sin \delta\,x}{s} + \frac{\mathfrak{Sin}\,\delta\,x}{S} \right),$$

$$p = p_0 - g\,\varrho_0\,y - \frac{\gamma\,C'}{2}\,y^2,$$

worin $\mathfrak{Sin}\,\delta\,d = S$, $\sin \delta\,d = s$ gesetzt ist.

Auch hier gibt es für hinreichend große d neben den Nullstellen $x = -d$, 0, $+d$ in dem Bereich $-d < x < +d$ weitere Nullstellen für v, im Allgemeinen verbunden mit Vorzeichenwechsel, nämlich die Abszissen x_n, für die

$$\frac{\sin \delta\,x_n}{\mathfrak{Sin}\,\delta\,x_n} = \frac{s}{S}$$

ist. Nun ist die Funktion $\frac{\sin\delta x}{\mathfrak{Sin}\,\delta x}$ (Abb. 2) überall stetig $\left(\frac{\sin\delta x}{\mathfrak{Sin}\,\delta x} = 1\right)$ und differenzierbar und hat Extrema für die Abszissen x_m, die der Relation $\mathfrak{Tg}\,\delta x_m = \operatorname{tg}\delta x_m$ genügen; die extremen Beträge der Funktion nehmen mit wachsendem x_m ab, sodaß die Funktion $\frac{\sin\delta x}{\mathfrak{Sin}\,\delta x}$ bereits in dem Intervall

$$0 \leq x \leq x_1\,, \quad \text{wobei} \quad \mathfrak{Tg}\,\delta x_1 = \operatorname{tg}\delta x_1$$

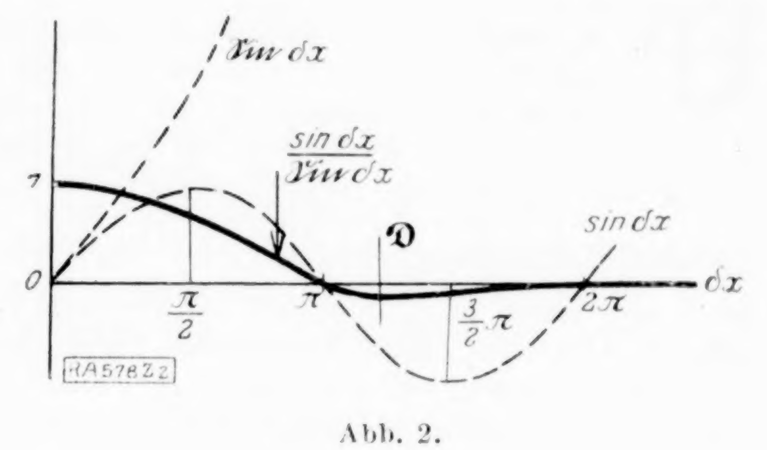


Abb. 2.

und $\pi < x_1 < 2\pi$ ist, alle Werte einmal und nur einmal erreicht hat, deren sie überhaupt für $x > 0$ fähig ist[1]). Diese Abszisse

$$x_1 = D$$

ist also eine Grenze für d, derart, daß für

$$d < D$$

$\frac{\sin\delta x}{\mathfrak{Sin}\,\delta x}$ für $0 < x < d$ nie $\frac{s}{S}$ gleich wird, während für

$$d > D$$

$\frac{\sin\delta x}{\mathfrak{Sin}\,\delta x}$ für mindestens ein x des Bereiches $0 < x < d$ den Wert $\frac{s}{S}$ erreicht, sodaß dann v neben $x = d$, 0, $-d$ weitere Nullstellen, im Allgemeinen mit Vorzeichenwechsel, besitzt. Wir finden also auch hier eine Grenze, welche die in Rede stehenden Strömungsfälle scheidet in solche, bei denen die Rechnung eine physikalisch eindeutige stationäre Strömung ergibt, und solche, bei denen instationäre Verhältnisse eintreten dürften, da die Möglichkeit des Zustandekommens der durch die Rechnung ermittelten Strömung kaum gegeben ist. Die Grenze für d ist hier $D = 3{,}9266 \cdot \sqrt[4]{\frac{\mu\lambda}{\gamma C'}}$, $C' = -C > 0$, also kleiner als die für $C > 0$ berechnete Abstandsgrenze. Für $\tau_1 = \tau_2$ wird $v = 0$; es ist dies wegen $C < 0$ ein labiler Ruhezustand, der sich im Experiment naturgemäß nicht erhält, indessen von der vorstehenden Rechnung nicht anders zu erwarten ist.

Zusammenfassung. Bei jeder stationären Flüssigkeitsströmung mit nur vertikaler Geschwindigkeitskomponente zwischen zwei vertikalen, im Abstand $2d$ parallelen Platten, die beide auf linear mit der Höhe gleich ansteigender bzw. abfallender Temperatur gehalten werden, aber derart, daß die Temperaturdifferenz zwischen Punkten gleicher Höhe von 0 verschieden ist, gibt es eine von den Konstanten μ, λ, γ der strömenden Substanz (Temperaturleitungskoeffizienten, innere Reibung und dem Produkt aus dem Betrag des Schwerebeschleunigungsvektor $\mathfrak{g}$, der Dichte der Substanz ϱ_0 und ihren Wärmeausdehnungskoeffizienten) und von der Vertikalkomponente $C \neq 0$ des Temperaturgradienten abhängige Grenze $2D$ für den Plattenabstand $2d$ dergestalt, daß für

$$d < D$$

eine physikalich eindeutige stationäre Strömung stattfindet, während für

$$d > D$$

sich physikalisch eindeutige Verhältnisse nicht einstellen dürften, da neben den Nullstellen der Geschwindigkeit an den Wänden und ihrer Symmetrieebene auch **innerhalb** der durch die Wände und ihrer Symmetrieebene begrenzten Bereiche weitere Nullstellen und Vorzeichenwechsel der Geschwindigkeit auftreten, die im Experiment offenbar zu instationären, turbulenten Erscheinungen führen. Die Grenze D ist gegeben durch

$$D = 5{,}5531 \cdot \sqrt[4]{\frac{\mu\lambda}{C\gamma}} \quad \text{für } C > 0\,,$$

$$D = 3{,}9266 \cdot \sqrt[4]{\frac{\mu\lambda}{C'\gamma}} \quad \text{für } C = -C' < 0.$$ 578

[1]) Diese Betrachtungen für $x > 0$ gelten in ganz analoger Weise auch für $x < 0$, da v eine ungerade Funktion von x ist. Vgl. S. 114 Anm. 2.

Über die angenäherte numerische Berechnung harmonischer und biharmonischer Funktionen.

Von FRANZ WOLF in Heidelberg.

Mit fünf Tafeln.

Um in praktischen Fällen die zahlenmäßige Integration von Randwertproblemen wenigstens angenähert leisten zu können, ersetzt man neuerdings vielfach partielle Differentialgleichungen durch Differenzengleichungen, die es gestatten, eine diskrete Anzahl von Näherungswerten für die gesuchte Funktion im Innern eines gegebenen Bereichs aus vorgeschriebenen Randbedingungen zu berechnen. Die Laplacesche Differentialgleichung $\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ verwandelt sich dabei in eine gemeine lineare Gleichung, nach der jeder Funktionswert im Bereich sich als arithmetisches Mittel aus vier Nachbarwerten darstellt. Man verwendet diese Beziehung zur angenäherten Lösung der ersten Randwertaufgabe, bei der diejenige Funktion w im Innern des Bereichs gesucht wird, die dort der Differentalgleichung $\Delta w = 0$ genügt, d. h. harmonisch ist, und die auf dem Rand vorgegebene Werte annimmt. Hierzu ist nur ein System von Bestimmungsgleichungen anzusetzen, das man nach seinen Unbekannten aufzulösen hat, um sofort eine Anzahl von Werten der gesuchten Näherungsfunktion zu erhalten.

Wegen der Schwierigkeiten, die sich der praktischen Auflösung größerer Gleichungssysteme entgegenstellen, ermöglicht diese Methode aber die Gewinnung von Werten nur an sehr wenigen Stellen des Bereichs, und es kommt so nur eine sehr grobe Annäherung an die Verhältnisse der Differentalgleichung zustande. Praktisch wertvoll wird die Verwendung der Differenzengleichung anstelle der Laplaceschen Differentialgleichung jedoch durch eine im Jahre 1918 von Herrn H. Liebmann angegebene Methode, die die wirkliche Auflösung der Gleichungssysteme umgeht und statt dessen die gesuchten Werte mittels eines sehr bequem zu handhabenden Rechenverfahrens durch sukzessive Approximation gewinnt. Dabei läßt sich die Anzahl der im Bereichsinnern berechenbaren Funktionswerte beträchtlich vergrößern, und die Annäherung an die Lösung der Differentiagleichung kann so offenbar wesentlich gesteigert werden[1]. Da es sich bei dieser Methode stets um die Berechnung von arithmetischen Mitteln handelt, so bezeichnen wir sie im folgenden kurz als das »Mittlungsverfahren«. Ursprünglich wurde die Konvergenz der Nährungswerte gegen die gesuchten Lösungen der Gleichungssysteme nur für quadratisch begrenzte Bereiche bewiesen. Obwohl an der Brauchbarkeit des Verfahrens auch in anderen Fällen von vornherein nicht zu zweifeln ist, soll doch im folgenden die Konvergenz in großer Allgemeinheit erneut bewiesen werden auf einem Weg, der geeignet erscheint, das eigentliche Wesen der Methode deutlich zu machen.

Im Anschluß daran teilen wir ein Annäherungsverfahren mit, das gestattet, mit Hilfe der »Mittlungsmethode« auch die zweite Randwertaufgabe zu lösen, also den Fall, daß statt des Funktionswertes selbst auf dem Rand die Ableitung in der Normalenrichtung gegeben ist. Schließlich wird es möglich, auch biharmonische Funktionen, also solche, die der partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung $\Delta \Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$ genügen, aus beliebig gegebenen Randwerten durch Zurückgehen auf das »Mittlungsverfahren« angenähert zu berechnen. Allerdings besteht für diese letzte Methode, wie wir sehen werden, eine gewisse Schwierigkeit darin, daß ein allgemeiner Beweis für die Konvergenz der Nährungswerte gegen die gesuchten Lösungen nach verschiedensten Methoden unmöglich zu sein scheint, obwohl an der Richtigkeit des Verfahrens nicht zu zweifeln ist. Schließlich wird sich bei allen drei Aufgaben Gelegenheit bieten, die errechneten Zahlenwerte mit den strengen Lösungen der Differenzengleichungen zu vergleichen. Gerade diese Genauigkeitsuntersuchungen dürften für den Praktiker nicht ohne Interesse sein.

I. Die erste Randwertaufgabe für harmonische Funktionen.

1. Das Liebmannsche Mittlungsverfahren[2]. Es sei irgend ein Bereich gegeben, in den man ein Netz quadratischer Maschen von willkürlicher Feinheit eingetragen hat.

[1] Wegen eines Beweises für die Konvergenz gegen die Lösung der Differentialgleichung vgl. J. Le Roux. Journ. de math. pur. et appl. (6) 10, 189, (1914).

[2] Vergl. hierzu: H. Liebmann. Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und konformer Abbildungen. Münchener Sitzgs.-Ber. 1918, S. 385.

Die Maschenweite wird zur Längeneinheit gewählt. Der Rand unterliege nur der Forderung, daß er mit den Ecken und Seiten des eingeschriebenen Maschengitters zusammenfällt. Im übrigen darf seine Gestalt ganz beliebig sein. In sämtlichen auf ihm liegenden Netzpunkten seien Funktionswerte fest vorgeschrieben mit Ausnahme nur der nach außen vorspringenden Ecken, da dort die Randwerte für die »Mittlung« nicht gebraucht werden. Man sucht in allen inneren Netzpunkten die Werte der harmonischen Gitterfunktion w, die die vorgeschriebenen Randwerte annimmt. Hierzu erteilt man in der Differenzgleichung

$$w(x+1,y)+w(x,y+1)+w(x-1,y)+w(x,y-1)-4\,w(x,y)=0 \qquad (1)$$

den Koordinaten x, y der Reihe nach alle diejenigen (ganzzahligen) Werte, die den inneren Punkten entsprechen, und erhält so ein System von ebenso vielen linearen Gleichungen (1), als innere Gitterpunkte vorhanden sind. Diese wären nach den Unbekannten $w(x,y)$ aufzulösen, doch ist dies bei einer größeren Zahl von Punkten praktisch unmöglich. Deshalb schreibt man statt dessen von vornherein auch den inneren Netzpunkten möglichst geschickt gewählte Rohwerte zu und verbessert diese, indem man von außen nach innen fortschreitend nach der Gleichung

$$w(x,y)={}^{1}/_{4}\,[w(x+1,y)+w(x,y+1)+w(x-1,y)+w(x,y-1)] \;. \qquad (2)$$

jeden Rohwert durch das arithmetische Mittel der vier umliegenden Werte ersetzt. Die neuerhaltenen Werte werden dann auf die gleiche Weise zum zweiten Mal verbessert und so fort, und wir behaupten, daß man so bei genügender Wiederholung des Verfahrens durch das ständige Mitwirken der richtig vorgegebenen Randwerte bei der Mittelbildung den wahren Lösungen des linearen Gleichungssystems beliebig nahe kommt, auch wenn das Gebiet eine ganz beliebige, nichtquadratische Begrenzung besitzt. In den folgenden Abschnitten **2** bis **6** geben wir einen Beweis für diese Behauptung, also den Konvergenzbeweis für das Liebmannsche »Mittlungsverfahren«. Nähere Angaben über die rechnerische Durchführung des Verfahrens folgen dann in den Abschnitten **7** und **8**.

2. Ansatz zum Konvergenz-Beweis. Wir betrachten die Differenz zwischen den wahren Lösungen der linearen Gleichungen und den ins Netz eingetragenen Näherungswerten. Diese muß bei fortgesetzter Wiederholung des Verfahrens gegen Null streben. Auf dem Rand ist sie stets Null, da ja die richtigen Randwerte von vornherein auch in das Rohwertschema eingetragen sind. Wir müssen also nur zeigen, daß die fortgesetzte Anwendung der Gleichung (2) auf ein Schema mit konstanten Randwerten Null und ganz beliebigen, endlichen Innenwerten diese Innenwerte ebenfalls gegen Null streben läßt. Hierzu fassen wir in einem solchen Schema irgend eine bestimmte Stelle mit den Kordinaten 0,0 zunächst weit ab vom Rande des Gebiets, um dort auftretende Besonderheiten zu vermeiden, ins Auge und untersuchen, wie sich der Funktionswert $w(00)$ an dieser Stelle durch die ursprünglich gegebenen Rohwerte ausdrückt, wenn die Verbesserung des Schemas einmal, zweimal . . . . ν-mal durchgeführt wurde. Die ursprünglichen Rohwerte bezeichnen wir dabei mit $w_0(x,y)$, die Nährungswerte nach ein-, zwei-, ... ν-maligem Verbessern mit $w_1(x,y)$, $w_2(x,y)$, ... $w_\nu(x,y)$. Negative Koordinaten werden im folgenden stets statt durch das Minuszeichen bequemer durch einen Querstrich bezeichnet.

Hiermit ist zunächst:

$$w_1(00)={}^{1}/_{4}\,[w_0(10)+w_0(01)+w_0(\bar{1}0)+w_0(0\bar{1})] \quad . \; . \; . \; . \quad (3_1)$$

$$w_2(00)={}^{1}/_{4}\,[w_1(10)+w_1(01)+w_1(\bar{1}0)+w_1(0\bar{1})] \quad . \; . \; . \quad (3_2)$$

$$w_3(00)={}^{1}/_{4}\,[w_2(10)+w_2(01)+w_2(\bar{1}0)+w_2(0\bar{1})] \quad . \; . \; . \; . \quad (3_3)$$

. . . .

$$w_\nu(00)={}^{1}/_{4}\,[w_{\nu-1}(10)+w_{\nu-1}(01)+w_{\nu-1}(10)+w_{\nu-1}(0\bar{1})] \quad . \quad (3_\nu)$$

Nur $w_1(00)$ ist schon hier durch die Rohwerte w_0 ausgedrückt. In den folgenden Zeilen aber müssen diese rechts erst noch eingeführt werden. Hierzu ist zu beachten, daß die in (3_2) rechts auftretenden w_1 selbst bei der ersten Verbesserung des Schemas bereits aus den w_0 als Mittel hervorgegangen sind, und zwar ist:

$$w_1(10)={}^{1}/_{4}\,[w_0(20)+w_0(11)+w_0(00)+w_0(1\bar{1})]$$

$$w_1(01)={}^{1}/_{4}\,[w_0(11)+w_0(02)+w_0(\bar{1}1)+w_0(00)]$$

$$w_1(\bar{1}0)={}^{1}/_{4}\,[w_0(00)+w_0(\bar{1}1)+w_0(\bar{2}0)+w_0(\bar{1}\bar{1})]$$

$$w_1(0\bar{1})={}^{1}/_{4}\,[w_0(1\bar{1})+w_0(00)+w_0(\bar{1}\bar{1})+w_0(0\bar{2})]$$

Führt man diese Ausdrücke in (3_2) ein, so wird:

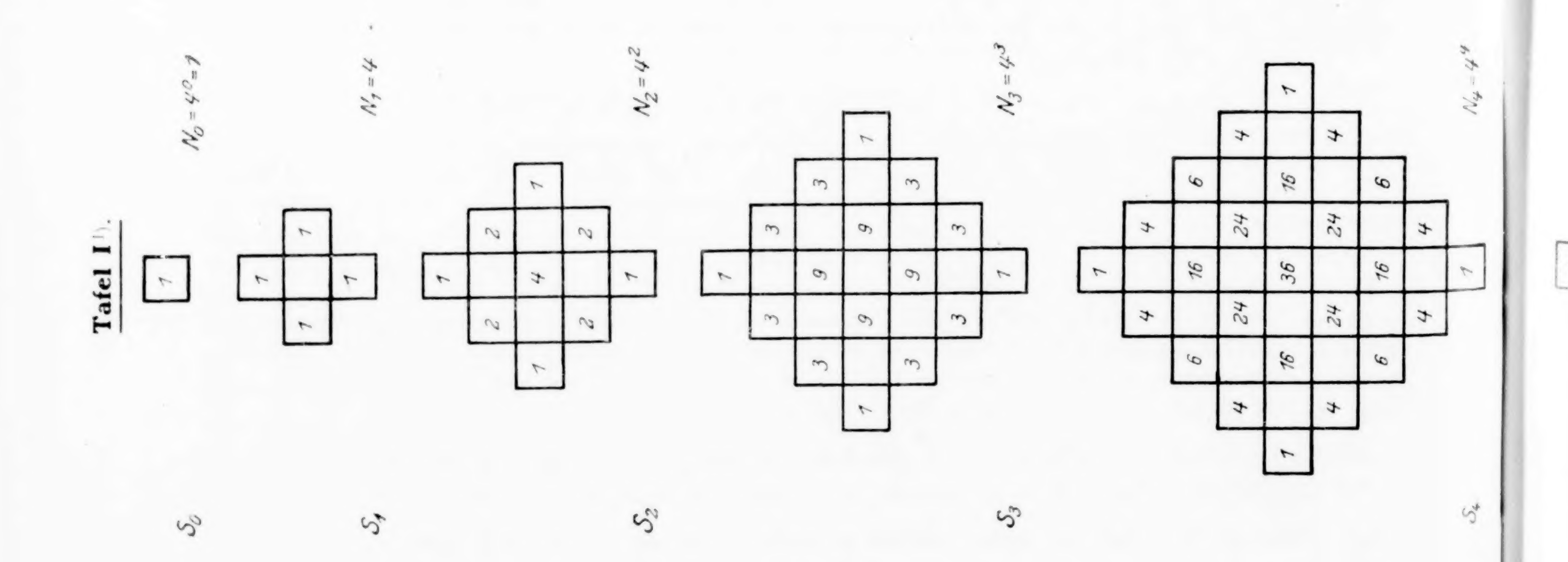
$$w_2(00) = \frac{1}{4^2}\left[w_0(20) + w_0(02) + w_0(\bar{2}0) + w_0(0\bar{2}) + 2\{w_0(11) + w_0(\bar{1}1) + w_0(1\bar{1}) + w_0(\bar{1}\bar{1})\} + 4\,w_0(00)\right] \quad . \quad . \quad (4),$$

womit auch dieser Näherungswert durch die w_0 ausgedrückt ist. Auf dieselbe Weise wie $w_2(00)$ hängen aber an allen Stellen, die dem Rand nicht zu nahe liegen, auch die anderen w_2-Werte mit den w_0 zusammen. Insbesondere erhalten wir für $w_2(10)$, $w_2(01)$ $w_2(\bar{1}0)$ und $w_2(0\bar{1})$ ganz analoge Ausdrücke wie in (4), mit denen die Gleichung (3_3) übergeht in die neue:

$$\begin{aligned} w_3(00) = \frac{1}{4^3}\Big[& w_0(30) + w_0(03) + w_0(\bar{3}0) + w_0(0\bar{3}) \\ & + 3\{w_0(21) + w_0(12) + w_0(\bar{1}2) + w_0(\bar{2}1) + w_0(2\bar{1}) \\ & \qquad + w_0(\bar{1}\bar{2}) + w_0(1\bar{2}) + w_0(\bar{2}\bar{1})\} \\ & + 9\{w_0(10) + w_0(01) + w_0(\bar{1}0) + w_0(0\bar{1})\}\Big] \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

So kann man — zunächst immer vorausgesetzt, daß der Rand noch genügend weit abliegt — in der Tat nacheinander $w_\nu(00)$ für jedes ν durch die ursprünglichen Rohwerte w_0 ausdrücken. Man hat nur jedesmal die vier Gleichungen anzuschreiben, in denen $w_{\nu-1}(10)$, $w_{\nu-1}(01)$, $w_{\nu-1}(\bar{1}0)$ und $w_{\nu-1}(0\bar{1})$ durch die w_0 ausgedrückt werden, ihre rechten Seiten in die Gleichung (3_ν) einzusetzen und gleiche w_0-Werte zusammenfassen. Allen w_0 gemeinsam ist dabei der Faktor $\frac{1}{4^\nu}$. Denn bei jeder folgenden Verbesserung des ganzen Schemas, oder wie wir kurz sagen, nach jedem »Schritt« der Annäherung tritt erneut der gemeinsame Faktor $^1/_4$ auf, weil stets w_ν aus vier umliegenden $w_{\nu-1}$ als Mittel hervorgeht, und $w_1(00)$ enthält selbst schon $^1/_4$ als gemeinsamen Faktor der w_0. Wir können $^1/_4\,\nu$ wie bei den Gleichungen (3_1), (4) und (5) jedesmal herausziehen und brauchen für das folgende nur noch die stets ganzzahligen und positiven, bei den w_0 verbleibenden Zählerkoeffizienten oder Gewichte zu betrachten.

3. Einführung der „Gewichtssterne". Diese Gewichte lassen sich bedeutend übersichtlicher als in Gleichungen dadurch darstellen, daß wir sie sternförmig um einen Mittelpunkt genau so anordnen, wie die den Wert w (00) zusammensetzenden w_0 selbst im Netz der Gitterpunkte um die Stelle 0,0 herumliegen. Gleichung (3_1) wird damit vollkommen ersetzt durch das Koeffizientenschema S_1 Taf. I und den zugehörigen Nenner $N_1 = 4$. Der Gleichung (4) entspricht Schema S_2 Taf. I mit dem Nenner $N_2 = 4^2$, der Gleichung (5) das Schema S_3 mit dem Nenner $N_3 = 4^3$. S_3 sagt also beispielsweise aus: $w_3(00)$, der Näherungswert nach dem dritten Schritt an irgend einer bestimmten Stelle 0,0,



stellt sich dar, als diejenige lineare Funktion der um 0,0 als Mittelpunkt liegenden Rohwerte w_0, in der jeder Rohwert mit dem im Schema S_3 an seiner Stelle stehenden Gewicht multipliziert und außerdem durch 4^3 dividiert wird. Wir bezeichnen diese Schemata, die zusammen mit den gemeinsamen Nennern nur eine übersichtliche Schreibweise der bisher aufgestellten Gleichungen bedeuten, kurz als »Gewichtssterne«.

In dieser Darstellung lassen sich auch für die weiteren Schritte die Koeffizienten der w_0 wesentlich einfacher ermitteln als mit Hilfe der Gleichungen. Anstatt nämlich wie früher die Ausdrücke für $w_{\nu-1}(10)$, $w_{\nu-1}(01)$, $w_{\nu-1}(\bar{1}0)$ und $w_{\nu-1}(0\bar{1})$ selbst explizit hinzuschreiben, sie dann in Gleichung (3_ν) einzusetzen und gleiche w_0 zusammenzufassen, brauchen wir uns jetzt nur die Sterne der Zählerkoeffizienten für $w_{\nu-1}(10)$, $w_{\nu-1}(01)$, $w_{\nu-1}(\bar{1}0)$ und $w_{\nu-1}(0\bar{1})$ alle gleichzeitig in ein einziges Netz von Gitterpunkten eingetragen zu denken und die Gewichte der zum Teil übereinandergreifenden Sterne an jeder Stelle zu addieren. Dann entstehen ganz von selbst in völliger Analogie zur rechnerischen Durchführung die Zählerkoeffizienten für $w_\nu(00)$ und zwar jetzt gleich in der übersichtlichen sternförmigen Anordnung. Den in $w_\nu(00)$ noch auftretenden Nenner 4_ν kennen wir von vornherein. Da der Stern für $w_{\nu-1}(00)$ beim vorigen Schritt gefunden wurde, können wir die für den neuen Schritt erforderlichen Sterne für $w_{\nu-1}(10)$, $w_{\nu-1}(01)$, $w_{\nu-1}(\bar{1}0)$ und $w_{\nu-1}(0\bar{1})$ ohne weiteres anschreiben. Denn sie stimmen mit dem für die Stelle (00) der Form nach überein, nur sind ihre Mitten jetzt die Punkte (10), (01),) $(\bar{1}0)$ bzw. $(0\bar{1})$. Hiernach sehen wir: Der Stern S_2 Taf. I für $w_2(00)$ entsteht einfach dadurch, daß wir die Sterne für $w_1(10)$, $w_1(01)$, $w_1(\bar{1}0)$ und $w_1(0\bar{1})$, die jeweils wie der Stern S_1 Taf I aus vier Einsen bestehen, deren Mitten aber bei (10), (01), $(\bar{1}0)$ und $(0\bar{1})$ liegen, in ein gemeinsames Schema eintragen und addieren. Analog erhalten wir den Stern S_3 für $w_3(00)$ durch Addition von vier Sternen S_2, deren Mitten wieder bei (10), (01), $(\bar{1}0)$ und $(0\bar{1})$ liegen. Und nun ist es leicht, durch weitere Addition von je vier Sternen auch sukzessive für größeres ν die Gewichte für $w_\nu(00)$ anzugeben.

Die rechnerische Durchführung vereinfacht sich noch wesentlich durch folgende Bemerkung: Man erkennt zunächst, daß das ganze Netz von Rohwerten $w_0(x, y)$ in zwei ineinander liegende Scharen derart zerfällt, daß sich $w_\nu(00)$ mit wachsendem ν abwechselnd nur durch die w_0 der einen und dann wieder nur durch die der anderen Schar ausdrückt. Bei geradem ν entsteht nämlich $w_\nu(00)$ nur aus solchen, für die $x+y$ gerade ist, während die anderen den Faktor Null haben, bei ungeradem ν aber aus solchen, für die $x+y$ ungerade ist, während jetzt an den Stellen der ersten Schar im Stern Null gesetzt zu denken ist. Wir nennen die Schar der $w_0(x, y)$, für die $x+y$ gerade ist kurz die gerade, die andere die ungerade Schar von w_0 Werten. Dieses Verhalten wird verständlich aus der Form des Sternes S_1 Taf. I, der nur w_0-Werte der ungeraden

$N_5 = 4^5$

					1					
				5		5				
			10		25		10			
		10		50		50		10		
	5		50		100		50		5	
1		25		100		100		25		1
	5		50		100		50		5	
		10		50		50		10		
			10		25		10			
				5		5				
					1					

S_5

$N_6 = 4^6$

						1						
					6		6					
				15		36		15				
			20		90		90		20			
		15		120		225		120		15		
	6		90		300		300		90		6	
1		36		225		400		225		36		1
	6		90		300		300		90		6	
		15		120		225		120		15		
			20		90		90		20			
				15		36		15				
					6		6					
						1						

S_6

[1]) Hier wie im folgenden stets ist die Mitte eines jeden Quadrats als Gitterpunkt aufzufassen.

Schar enthält, und aus der Berechnung jedes folgenden Sterns durch Uebereinanderlagerung von je vier vorhergehenden, auf die Stellen der anderen Schar verschobenen Sternen.

Führt man nun diese Uebereinanderlagerung von vier Sternen $\nu - 1$ mit den Mitten bei (10), (01), $(\bar{1}0)$ und $(0\bar{1})$ wirklich aus und addiert die dabei auf dieselbe Stelle fallenden Gewichte, so tut man nichts anderes, als wenn man im unverschobenen Stern für $w_{\nu-1}(00)$ an jeder Stelle, an der dort Null steht, aber im folgenden Stern ν eine Gewichtszahl erscheinen muß, die vier umliegenden Gewichtszahlen des Sternes $\nu - 1$ addiert. Längs des Randes von Stern $\nu - 1$ sind dabei nur zwei umliegende Gewichtszahlen, an den Ecken nur noch eine einzige, nämlich die Eins von Null verschieden. So läßt sich also der Stern ν aus dem Stern $\nu - 1$ durch einfachste Addition benachbarter Gewichte herleiten (vgl. S_4 usf. Taf. I), und man kann wesentlich leichter als bei der expliziten Darstellung in Gleichungen mittels der symbolischen Schreibweise in Gewichtssternen zusammen mit dem zugehörigen Nenner $N_\nu = 4^\nu$ für jedes ν $w_\nu(00)$ aus dem schon bekannten $w_{\nu-1}(00)$ als Funktion der ursprünglichen Rohwerte berechnen.

4. Explizite Berechnung der Gewichtszahlen. Der Aufbau der Gewichtssterne ist so einfach, daß es leicht gelingt, auch ihr allgemeines Bildungsgesetz anzugeben. Erstens kann man nämlich behaupten:

Im ν-ten Stern besteht jede Seite des äußersten Quadrates von Gewichten aus der Reihe der ν-ten Binominalkoeffizienten $\binom{\nu}{\lambda}$, $\lambda = 0, 1, 2 \ldots \nu$.

Dies folgt sofort mit Hilfe der bekannten Formel:

$$\binom{\nu}{\lambda} + \binom{\nu}{\lambda+1} = \binom{\nu+1}{\lambda+1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

durch Schluß von ν auf $\nu + 1$ aus der eben beschriebenen Bildungsweise der Sterne durch Addition. Für die Sterne $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ ergibt sich die Richtigkeit aus Taf. I.

Zweitens können wir für die im Innern der Sterne auftretenden Gewichtszahlen behaupten:

Jede Zahl im Innern eines Sternes ist das Produkt aus zwei Binomialkoeffizienten auf dem Randquadrat des Sternes. Diese liegen da, wo zwei durch die Stelle der gesuchten Zahl gelegte Halbstrahlen den Rand treffen, wenn sie parallel zu benachbarten Seiten des Randquadrates gezogen werden.

So ist beispielsweise

im Stern S_2: $4 = 2 \cdot 2$;
» » S_3: $9 = 3 \cdot 3$;
» » S_4: $16 = 4 \cdot 4$;
$24 = 4 \cdot 6$; u. a. m.

Der Beweis ergibt sich wieder mittels des Schlusses von ν auf $\nu + 1$ aus dem eben beschriebenen Bildungsgesetz. Nebenstehendes Schema zeigt ausgezogen Teile des Randes von Stern ν, gestrichelt dagegen, in dieselbe Abbildung eingezeichnet, die entsprechenden Teile des Randes von Stern $\nu + 1$. Vorausgesetzt nun, im Stern ν seien die inneren Zahlen tatsächlich Produkte aus den zugehörigen Binomialkoeffizienten auf dem Rand, so gilt für irgend vier innere Zahlen a, b, c, d in derselben Anordnung wie in der Figur:

$$a = \binom{\nu}{\lambda}\binom{\nu}{\mu} \qquad b = \binom{\nu}{\lambda+1}\binom{\nu}{\mu}$$

$$c = \binom{\nu}{\lambda}\binom{\nu}{\mu+1} \qquad d = \binom{\nu}{\lambda+1}\binom{\nu}{\mu+1}.$$

Nach dem obigen Bildungsgesetz wird dann im Stern $\nu+1$ einfach:

$$z = a + b + c + d = \left[\binom{\nu}{\lambda} + \binom{\nu}{\lambda+1}\right]\cdot\left[\binom{\nu}{\mu} + \binom{\nu}{\mu+1}\right]$$

oder nach Formel (6):

$$= \binom{\nu+1}{\lambda+1}\cdot\binom{\nu+1}{\mu+1}.$$

Das heißt, auch im Stern $\nu+1$ werden die inneren Zahlen Produkte aus den zugehörigen Binomialkoeffizienten auf dem Rand (vgl. die Abb.). Nun erkannten wir die Gültigkeit dieser Regel an den früher berechneten Sternen für $\nu = 2, 3 \ldots$ Folglich ist auch die zweite Behauptung allgemein erwiesen.

Mittels dieser beiden Eigenschaften der Gewichtssterne ist es jetzt möglich, auch ohne Berechnung der vorhergehenden Sterne für jedes gewünschte ν den Stern ν sofort zahlenmäßig anzugeben. In der Gesamtheit aller Gewichtssterne hat man übrigens, wenn man sie zu einer Pyramide anordnet, ein räumliches Analogon zu dem Pascalschen Dreieck der Kombinatorik. Hier wie dort entsteht jede Zahl der Schicht $\nu+1$ durch Addition der unmittelbar darüber stehenden zwei bezw. vier Zahlen der Schicht ν. Die Seitenflächen der Pyramide bestehen selbst aus vier Pascalschen Dreiecken. Im vierdimensionalen Raum entspricht jeder Zeile des Pascalschen Dreieckes und jedem quadratischen Stern der Pyramide ein aus Koeffizienten bestehendes Oktaeder, dessen allgemeines Bildungsgesetz allerdings nicht so leicht zu übersehen ist als das der Zeilen bezw. der Sterne.

$w_\nu(00)$ wird durch den bisher betrachteten Stern ν dann richtig dargestellt, wenn dieser noch vollkommen ins Innere des Bereiches fällt, also vom Rand nicht beeinflußt wird. Zum Unterschied von den später behandelten »umrandeten Sternen« nennen wir unsere bisherigen »normale Sterne«. Die Summe aller Koeffizienten eines Normalsternes ν ist gerade gleich 4^ν. Denn im Stern S_1 beträgt sie 4, und jeder folgende Stern ν entsteht immer durch Addition von vier gleichen Sternen $\nu-1$, wodurch die Koeffizientensumme jedesmal vervierfacht wird. Wir bezeichnen nun mit M den größten absoluten Betrag aller in unserem gegebenen Bereich überhaupt auftretenden Rohwerte w_0. Im schlimmsten Fall könnten alle w_0 gerade gleich M sein, oder auch alle gleich $-M$. Dann würde M oder auch $-M$ gerade so oft zur Bildung von $w_\nu(00)$ herangezogen, als die ganze Summe der Gewichte des Sternes ν angibt, also nach oben 4^ν mal. Dazu träte außerdem der zugehörige Nenner 4^ν. Wir können also, solange die Sterne ganz ins Innere des Bereiches fallen, mit Sicherheit nur aussagen, daß für alle solchen ν gilt:

$$|w_\nu(00)| \leq M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

5. „Umrandete" Sterne. Nach einer gewissen Anzahl von Schritten aber muß mindestens eine der Gewichtszahlen des Sternes ν auf einen Randpunkt fallen. Das heißt, bei der Bildung von $w_\nu(00)$ soll nun auch dieser Randwert mitwirken, und zwar mit dem Gewicht der auf seine Stelle fallenden Zahl des Sternes ν. Wir haben aber den konstanten Randwert Null vorausgesetzt. Daher dürfen wir an der Stelle, wo der Rand erreicht wird, uns statt der Gewichtszahl in den Stern ν der Deutlichkeit halber auch eine Null eingetragen denken. Jetzt kann, selbst wenn alle w_0 im Innern des Bereiches gleich M oder alle gleich $-M$ wären, in (7) das Gleichheitszeichen nicht mehr gelten, sondern es ist für dieses bestimmte ν sicher schon:

$$|w_\nu(00)| < M,$$

und es gilt, dieses Kleinerwerden mit wachsendem ν weiter zu verfolgen.

Um den nächsten Stern für $w_{\nu+1}(00)$ zu bilden, hätten wir nach **3.** die vier Sterne ν, deren Mitten bei (10), (01), $(\bar{1}0)$ und $(0\bar{1})$ liegen, übereinanderzulagern und zu addieren. Wenn aber schon eine Zahl des Sternes für $w_\nu(00)$ auf den Rand fiel, so muß erst recht einer der vier verschobenen Sterne ν Stellen des Randes bedecken, ja er müßte sogar, wenn er dieselbe normale Form hätte wie unsere bisherigen Sterne, noch über die Punkte des Randes hinausreichen bis zu Stellen, die mit der Aufgabe überhaupt nichts zu tun haben. Ein Beispiel mag dies erläutern: Der Punkt (00) liege drei Maschenweiten von einem längeren, geradlinigen Stück des Randes entfernt. (Vgl. Taf. II. Der Rand wird hier zwischen zwei dickere parallele Linien eingeschlossen, während das Karo, das die Stelle (00) enthält, stark eingerahmt ist.) Die übrigen Teile des Randes mögen so weit abliegen, daß sie auf unsere Betrachtungen keinen Einfluß

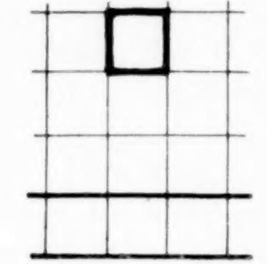
haben. Bei diesen Annahmen fällt zum ersten Mal nach drei Schritten die Eins der linken Ecke des Sterns für $w_3\,(00)$ bei $(\bar{3}0)$ auf den Rand und darf durch Null ersetzt werden. Im Interesse einer kurzen Ausdrucksweise bezeichnen wir weiterhin den Stern für $w_\nu\,(xy)$, also den Stern nach dem ν-ten Schritt, dessen Mitte bei (xy) liegt, mit $S_\nu\,(xy)$. Der obige Stern heißt demnach $S_3\,(00)$, und der folgende $S_4\,(00)$, wäre nun zu bilden durch Zusammenfügen von vier Sternen $\nu = 3$ und Addition der übereinandergreifenden Teile, was wir symbolisch ausdrücken durch die Gleichung:

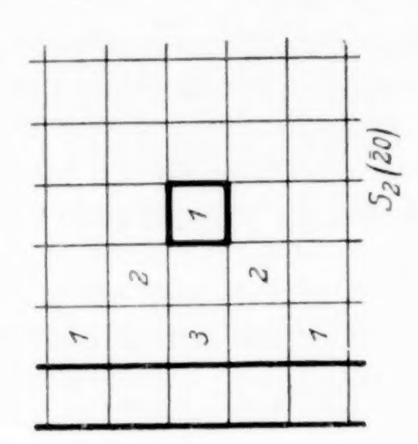
$$S_4\,(00) = S_3\,(10) + S_3\,(01) + S_3\,(\bar{1}0) + S_3\,(0\bar{1}).$$

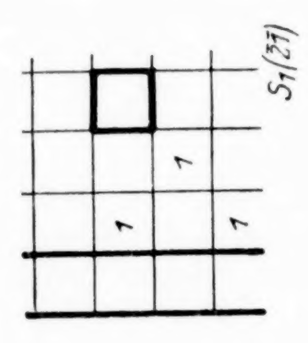
Hierin haben $S_3\,(01)$ und $S_3\,(0\bar{1})$ dieselbe Form wie $S_3\,(00)$. Sie sind nur nach (01) bzw. $(0\bar{1})$ verschoben. $S_3\,(10)$ ist ein Normalstern $\nu = 3$. Würden wir aber auch für $S_3\,(\bar{1}0)$ einen Normalstern einsetzen, so würde er bei $(\bar{3}1)$ und $(\bar{3}\bar{1})$ mit dem Rand zusammenfallen und bei $(\bar{4}0)$ sogar über den Rand hinausgreifen, was sinnlos wäre. Um die wahre Form von $S_3\,(\bar{1}0)$ zu finden, muß man diesen Stern in die Bestandteile aufspalten, aus denen er entsteht. Es muß nämlich sein:

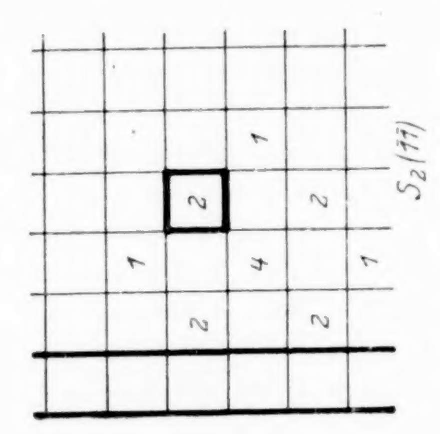
$$S_3\,(\bar{1}0) = S_2\,(00) + S_2\,(\bar{1}1) + S_2\,(\bar{2}0) + S_2\,(\bar{1}\bar{1}).$$

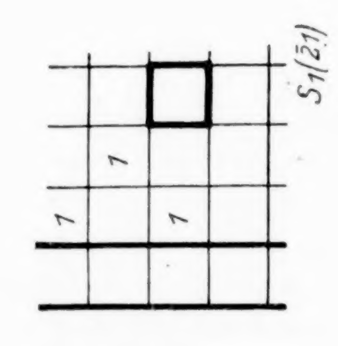
Hierin ist $S_2\,(00)$ Normalstern $\nu = 2$, $S_2\,(\bar{1}1)$ und $S_2\,(\bar{1}\bar{1})$ haben dieselbe Form, nur wird ihre linke Eins auf dem Rand durch Null ersetzt. $S_2\,(\bar{2}0)$ aber würde

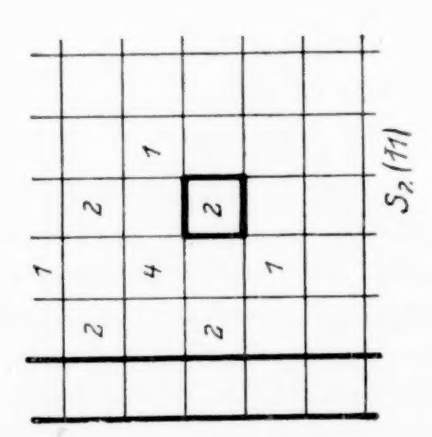




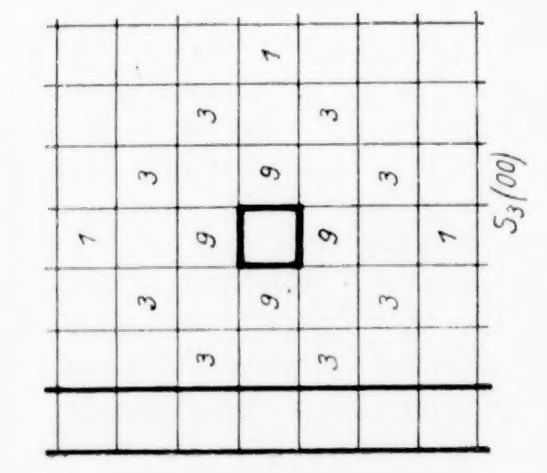


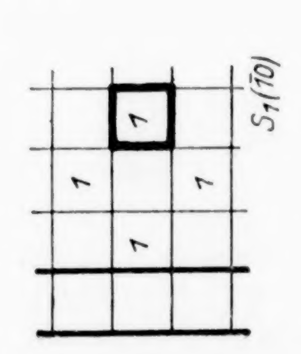


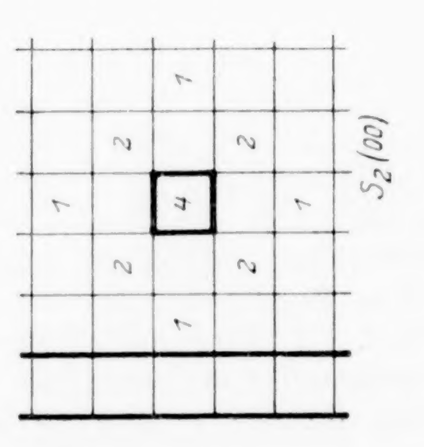


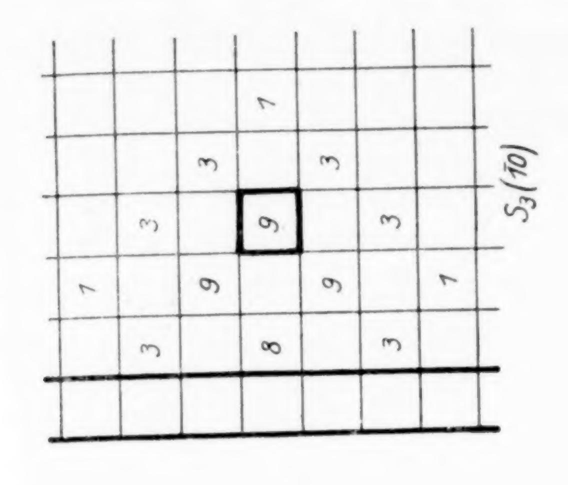








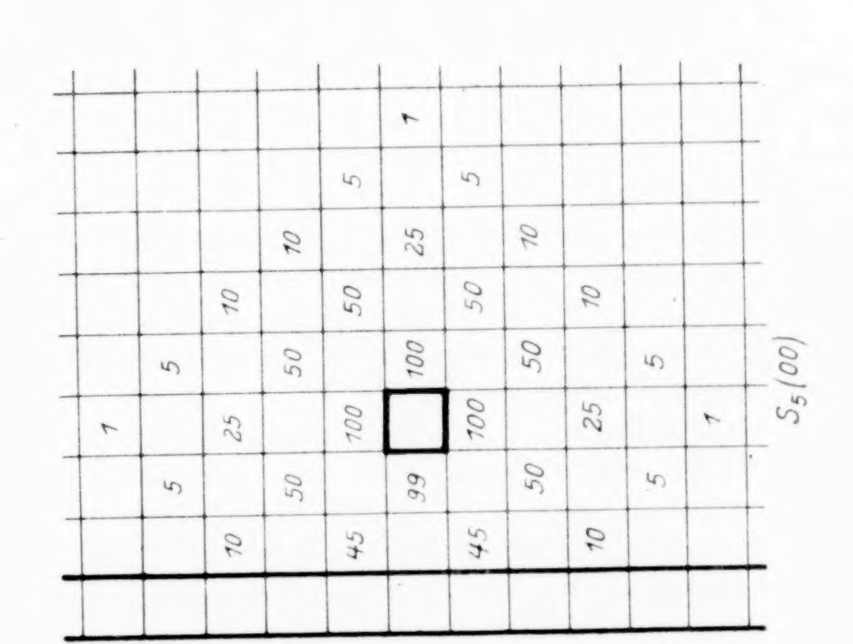




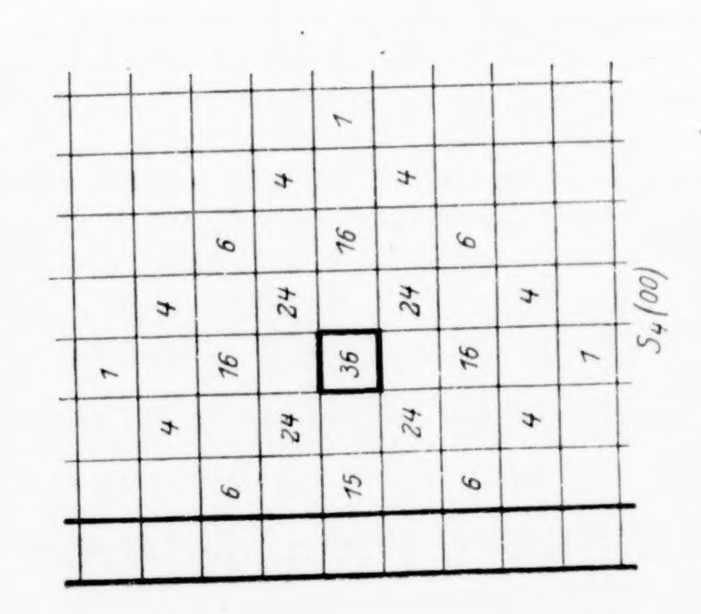
$S_6(00)$

$S_3(0\bar{1})$

$S_3(01)$



$S_3(10)$



als Normalstern wieder über den Rand nach links hinausreichen. Wir müssen ihn also nochmals aufspalten. Diesmal wird nur:

$$S_2(\bar{2}0) = S_1(\bar{1}0) + S_1(21) + O + S_1(\bar{2}\bar{1}).$$

Denn einen vierten Stern, $S_1(\bar{3}0)$, gibt es nicht, weil der Randwert $w_0(\bar{3}0) = 0$ vorgegeben ist und nicht erst gesucht wird. Die drei $S_2(\bar{2}0)$ zusammensetzenden Sterne sind aber alle sofort angebbar. Denn $S_1(\bar{1}0)$ ist normal für $\nu = 1$, und bei $S_1(21)$ und $S_1(\bar{2}1)$ fehlt nur die linke Eins auf dem Rand.

Somit ergibt sich:

$$S_4(00) = S_3(10) + S_3(01) + [S_2(00) + S_2(\bar{1}1) + \{S_1(\bar{1}0) + S_1(\bar{2}1) + S_1(\bar{2}\bar{1})\} + S_2(\bar{1}\bar{1})] + S_3(0\bar{1}),$$

und man kann hiernach die Entstehung des neuen, nicht mehr normalen Sternes in Taf. II verfolgen. Er enthält nicht nur drei Koeffizienten weniger als der entsprechende Normalstern, sondern außerdem ist eine seiner Gewichtszahlen, nämlich die bei $(\bar{2}0)$, um Eins kleiner geworden als die entsprechende Zahl im Normalstern. Dies erklärt sich sofort daraus, daß beim Aufbau die Eins des jetzt fehlenden Sternes $S_1(\bar{3}0)$ an der Stelle $(\bar{2}0)$ fortfiel, die im Normalstern enthalten ist.

Für den nächsten Stern $S_5(00)$ findet man durch ganz entsprechende Aufspaltung:

$$S_5(00) = S_4(10) + S_4(01) + [S_3(00) + S_3(\bar{1}1) + \{S_2(\bar{1}0) + S_2(\bar{2}1) + S_2(\bar{2}\bar{1})\} + S_3(\bar{1}\bar{1})] + S_4(0\bar{1}),$$

womit auch er berechenbar wird. Bei dem folgenden Stern $S_6(00)$ muß außer $S_5(\bar{1}0)$ jetzt auch $S_5(10)$ in seine Bestandteile aufgespalten werden, da ein Normalstern $S_5(10)$ schon über den Rand hinausgreifen würde. Sonst verläuft alles analog oben. $S_5(00)$, Taf. II hat nun schon sechs und das ebenfalls noch berechnete $S_6(00)$, Taf. II zehn Gewichtszahlen weniger als die entsprechenden Normalsterne. Außerdem fällt eine immer wachsende Anzahl von inneren Gewichten kleiner aus, als nach den Normalsternen zu erwarten wäre, weil mehr und mehr Teilsterne, die die normalen Sterne aufbauen helfen, jetzt mit ihren Mitten außerhalb unseres Bereiches fallen, also beim Aufbau der neuen Sterne wegbleiben müssen.

Man erkennt, daß dies unabhängig von unserem speziellen Beispiel allgemein gelten muß. Jeder Stern, der bei normaler Gestalt irgendwo über den Rand hinausgreifen würde, setzt sich in Wirklichkeit nicht aus allen Bestandteilen zusammen, aus denen der entsprechende Normalstern entsteht, sondern alle die Teilsterne, deren Mitten auf den Rand zu liegen kämen, fallen weg. Dies führt zu dem für das folgende wichtige Gesetz, daß im Innern die Gewichtszahlen, sobald die Sterne den Rand erreicht haben, langsamer mit der Schrittzahl ν anwachsen, als die entsprechenden Zahlen der Normalsterne. Je größere Teile des Randes vom Stern erreicht sind, desto stärker macht sich die Wirkung geltend, da die fehlenden Sterne immer zahlreicher werden.

6. Abschätzung des ν-ten Näherungswertes. Der Betrag $|w_\nu(00)|$ wird sicher dann am größten, wenn die Rohwerte w_0, aus denen es sich nach dem Stern ν mit dem zugehörigen Nenner 4^ν zusammensetzt, alle denselben größtmöglichen absoluten Wert haben, also alle entweder gleich $+M$ oder alle gleich $-M$ sind. Sobald nun die Sterne überall den Rand erreicht haben, wächst die Anzahl ihrer Koeffizienten nicht mehr wie vorher mit ν, sondern sie bleibt von da ab konstant für gerades bezw. ungerades ν. Es besitzt nämlich immer der Stern mit geradem ν soviele Koeffizienten als Stellen (xy) unserer geraden w_0-Schar von **3.** im Bereich liegen. Diese Anzahl sei p. Der Stern mit ungeradem ν aber enthält immer soviele Koeffizienten, als Stellen der ungeraden w_0-Schar ins Innere des Gebietes fallen. Diese Anzahl sei q. Außerdem können wir nach oben sicher sein, daß kein Koeffizient des umrandeten Sternes ν größer ist, als der größte Koeffizient des Normalsternes ν. Dieser ist für gerades ν gleich $\binom{\nu}{\frac{\nu}{2}}^2$, oder wenn wir $\nu = 2\tau$ einführen, gleich $\binom{2\tau}{\tau}^2$. Für ungerades ν wird er $\binom{\nu}{\frac{\nu-1}{2}}^2$, oder mit $\nu = 2\tau + 1$

gleich $\binom{2\tau+1}{\tau}^2$. Ersetzen wir also die Koeffizienten unseres umrandeten Sternes ν sämtliche durch den größten des Normalsterns ν, so ist sicher immer:

$$|w_\nu(00)| < \frac{p\,M}{4^{2\tau}} \cdot \binom{2\tau}{\tau}^2 \qquad \text{für } \nu = 2\tau \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

$$|w_\nu(00)| < \frac{q\,M}{4^{2\tau+1}} \cdot \binom{2\tau+1}{\tau}^2 \qquad \text{für } \nu = 2\tau+1 \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

und zwar gilt dies jetzt für jeden beliebigen Gitterpunkt (00) im ganzen Bereich, auch in beliebiger Nähe des Randes.

Nun ist aber:

$$\binom{2\tau}{\tau} = \frac{(2\tau)!}{(\tau!)^2} \text{ und } \binom{2\tau+1}{\tau} = \frac{1}{\tau+1} \cdot \frac{(2\tau+1)!}{(\tau!)^2}.$$

Mit Hilfe der für jedes positive, ganzzahlige n geltenden Ungleichungen[1]):

$$\sqrt{2\pi} \cdot e^{-n} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} < n! < \sqrt{2\pi} \cdot e^{-n+\frac{1}{12n}} \cdot n^{n+\frac{1}{2}}$$

wird also:

$$\frac{p\,M}{4^{2\tau}} \cdot \binom{2\tau}{\tau}^2 < \frac{p\,M}{4^{2\tau}} \left[\frac{\sqrt{2\pi} \cdot e^{-2\tau+\frac{1}{24\tau}} \cdot 2^{2\tau+\frac{1}{2}} \cdot \tau^{2\tau+\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\tau} \cdot \tau^{\tau+\frac{1}{2}}\right)^2} \right]^2 = \frac{p\,M}{\pi} \cdot \frac{e^{\frac{1}{12\tau}}}{\tau}.$$

Läßt man nun τ mit der Schrittzahl ν unbegrenzt wachsen, so wird:

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{p\,M}{\pi} \cdot \frac{e^{\frac{1}{12\tau}}}{\tau} = 0,$$

also nach (8) erstreckt auch:

$$\lim_{\nu \to \infty} |w_\nu(00)| = 0 \text{ für } \nu = 2\tau.$$

Andererseits ergibt sich mittels der Ungleichungen (10):

$$\frac{q\,M}{4^{2\tau+1}} \binom{2\tau+1}{\tau}^2 < \frac{q\,M}{4^{2\tau+1} \cdot (\tau+1)^2} \cdot \left[\frac{\sqrt{2\pi} \cdot e^{-(2\tau+1)+\frac{1}{24\tau+12}} \cdot (2\tau+1)^{2\tau+1+\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\tau} \cdot \tau^{\tau+\frac{1}{2}}\right)^2} \right]^2$$

$$= \frac{q\,M}{8\,\pi\,e^2} \cdot \frac{\left(2+\frac{1}{\tau}\right)^3}{\tau+2+\frac{1}{\tau}} \cdot e^{\frac{1}{12\tau+6}} \cdot \left[\left(1+\frac{1}{2\tau}\right)^{2\tau}\right]^2.$$

Da aber

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{\left(2+\frac{1}{\tau}\right)^3}{\tau+2+\frac{1}{\tau}} = 0, \qquad \lim_{\tau \to \infty} e^{\frac{1}{12\tau+6}} = 1, \qquad \lim_{\tau \to \infty} \left(1+\frac{1}{2\tau}\right)^{2\tau} = e,$$

so ist auch

$$\lim_{\tau \to \infty} \left\{ \frac{q\,M}{8\,\pi\,e^2} \cdot \frac{\left(2+\frac{1}{\tau}\right)^3}{\tau+2+\frac{1}{\tau}} \cdot e^{\frac{1}{12\tau+6}} \cdot \left[\left(1+\frac{1}{2\tau}\right)^{2\tau}\right]^2 \right\} = 0,$$

und nach (9) erstrecht:

$$\lim_{\nu \to \infty} |w_\nu(00)| = 0 \qquad \text{für } \nu = 2\tau+1.$$

Also wird tatsächlich, wie wir beweisen wollten, an jeder Stelle des Bereiches durch das Ermittlungsverfahren nach einer genügend großen Anzahl von Schritten der Unterschied zwischen wahrem und Näherungswert, das heißt unser $|w_\nu(00)|$, unter jede noch so kleine Schranke herabgedrückt. Ueber die spezielle Form des Randes brauchten wir zum Beweis keine Voraussetzung zu machen. Benutzt wurde nur, daß die Sterne

[1]) Serret-Scheffers, Differential- und Integralrechnung II, Nr. 518. Zuerst: J. A. Serret, C. R. 50, 622, 1860.

überhaupt durch irgend einen mit dem Gitter zusammenfallenden geschlossenen Rand umgeben werden und folglich auch bei unbegrenzt wachsendem ν immer nur eine endliche Anzahl p oder q von Gewichtszahlen enthalten. Im übrigen ist die Gestalt des Randes beliebig. Er kann einspringende Ecken haben, aus mehreren isolierten Teilen bestehen, so daß das Gebiet mehrfach zusammenhängt oder selbst in mehrere Teile zerfällt u. a. m.

Der Beweis läßt sich durch eine andere Fragestellung auch noch auf einem etwas einfacheren, wenn auch dafür weniger instruktiven Weg erbringen. Die Untersuchung des ν-ten Näherungswertes, w_ν (00), wurde aber deshalb hier eingehend behandelt, weil wir später anläßlich der Differentialgleichung $\Delta \Delta u = 0$ darauf zurückgreifen werden. Statt dessen denke man sich in den ganzen Bereich, dessen Randwert wieder konstant gleich Null sei, nur einen einzigen von Null verschiedenen Rohwert w_0 (00) eingetragen, und wir fragen, was aus ihm entsteht, wenn dieses spezielle Rohwertschema einmal, zweimal . . . ν-mal dem Mittlungsverfahren unterworfen wird. Man findet, daß w_0 (00) in immer mehr, immer kleinere Teile aufgespalten wird, die sich nach der Vorschrift derselben Sterne über den ganzen Bereich ausbreiten, die wir vorher eingehend behandelten. Wenn die Sterne den Rand erreicht haben, wächst die Anzahl der Teile nicht weiter an, aber ihre Größe nähert sich mit wachsendem ν mehr und mehr der Null. Man zeigt mit denselben Hilfsmitteln wie oben schließlich ihr völliges Verschwinden für unbegrenztes Anwachsen der Schrittzahl. Wenn statt eines einzigen alle Rohwerte im Innern des ganzen Bereiches von Null verschieden angenommen werden, so ändert sich an der Betrachtung nichts, als daß die Sterne aller Rohwerte übereinandergelagert und addiert werden müssen. In die Abschätzungsformeln treten dann einfach anstatt der Koeffizienten p und q andere konstante Faktoren ein, womit die Konvergenz also auch auf diesem zweiten Weg in derselben Allgemeinheit wie zuerst bewiesen werden kann.

7. Bemerkungen zur Durchführung des Mittlungsverfahrens. Bei der rechnerischen Durchfühung des in **1.** dargelegten Mittlungsverfahrens ist vor allem auf die Beschaffung der Rohwerte große Sorgfalt zu verwenden, da man dadurch das Approximationsverfahren ganz wesentlich verkürzen kann, während es sich sonst leicht endlos hinzieht und anfängliche Nachlässigkeit bitter rächt. Bei numerischen Versuchen im Zusammenhang mit dem später beschriebenen Verfahren für das Problem vierter Ordnung gelang es, die Rohwerte für Quadrate mit $n = 12$ inneren Gitterpunkten längs einer Randseite so gut zu bestimmen, daß die darauf folgende Ermittlung stets schon nach 12 bis 15 Schritten zum Stillstand der Werte, also ans Ziel der Approximation führte. Bei früheren Berechnungen mit schlechten Rohwerten in anderen, auch kleineren Bereichen hatten oft erst 30 und mehr Schritte — dies bedeutet eine Rechenarbeit von mehreren Tagen — genügt, um die endgültigen Werte zu erreichen. Die Rohwerte für $n = 12$ wurden aus schon vorhandenen, entsprechenden Quadraten mit kleinerem n, also roherer Gittereinteilung in der Weise gewonnen, daß man die Zahlen einiger besonderer Stellen des Bereichs, vor allem der vier inneren Eckpunkte und der Quadratmitte aus den entsprechenden Werten für kleinere n graphisch extrapolierte. So dann wurden, ebenfalls graphisch auf Millimeterpapier, mit Benutzung der schon gewonnenen Werte zunächst längs der vier Seiten des ersten Innenrings von Gitterpunkten und dann auch längs aller horizontalen und vertikalen Reihen von Punkten für das ganze Quadrat Querschnitte durch die gesuchte Fläche entworfen unter möglichster Anlehnung an die schon bekannte Form der Fläche bei kleineren n. Die hieraus abgelesenen Ordinaten stellten sehr gut brauchbare Rohwerte für das ganze Gebiet dar. Demnach wäre bei einer großen Aufgabe auch in anderen Fällen die Mühe nicht zu scheuen, zunächst dasselbe Problem etwa mit einer nur ganz groben und dann noch mit einer etwas feineren Gittereinteilung durchzurechnen und von da aus nach dem obigen erst in zweckentsprechender Weise die Rohwerte für die eigentliche Aufgabe herzuleiten. Man spart damit mehr Arbeit, als wenn man gleich bei der eigentlichen Aufgabe beginnt, mit schlechten Rohwerten blindlings darauf los zu rechnen.

Zur Abkürzung des Verfahrens ist es mitunter auch zweckmäßig, die gesuchten Funktionswerte aus den Näherungswerten der ersten Schritte zu extrapolieren. Man muß dabei aber vorsichtig sein. Denn nach ähnlichen Ueberlegungen wie am Ende von **4** kann unser früheres w_ν (00) durch den Einfluß großer Nachbarrohwerte anfänglich dem Betrage nach noch wachsen. Das heißt, ein Näherungswert der allgemeinen Aufgabe mit beliebigen Randwerten kann bei den ersten Schritten der Rechnung noch falscher

werden als der ursprüngliche Rohwert. Erst nach einer gewissen Anzahl von Schritten, die von der Größe des Bereichs abhängt, da erst alle Sterne den Rand ganz erreichen müssen, beginnen alle Näherungswerte, den wahren Lösungen der linearen Gleichungen zuzustreben. Erst dann erhält man eine angenäherte Vorstellung von dem Ziel gegen das die Werte wandern, und erst dann hat es wirklich Sinn, zu extrapolieren. Auch die weitere Annäherung erfolgt übrigens oft nicht monoton, sondern oszillierend. Dies geht daraus hervor, daß $w_\nu\,(00)$ sich abwechselnd nur aus Zahlen der einen oder anderen der in **3** genannten Scharen von Rohwerten zusammensetzt. Solche Erscheinungen übersieht man besonders deutlich, wenn man das Ermittlungsverfahren in vollkommener Analogie zur Berechnung graphisch mit Zirkel und Millimeterpapier durchführt. Doch bietet diese Methode keine wesentlichen Vorteile an Schnelligkeit gegenüber dem numerisehen Weg.

Sobald alle Sterne den Rand überall erreicht haben, bedeutet tatsächlich, abgesehen von dem ständigen Oszillieren, jeder Wert w_ν eine Verbesserung gegenüber dem Wert $w_{\nu-1}$, und zwar gilt dies in gleicher Weise bei der speziellen Fassung unseres Konvergenzbeweises wie bei der allgemeinen Aufgabe mit beliebigen Randwerten. Wenn man also beispielsweise von links kommend schon den Wert an der Stelle $(\bar{1}0)$ und auf dem nächstäußeren Ring von Gitterpunkten etwa denjenigen bei (01) verbessert hat, so kann man das Verfahren weiter dadurch beschleunigen, daß man den Wert $w_\nu\,(00)$ statt wie bisher nach der Gleichung (3_ν) nach der folgenden berechnet:

$$w_\nu\,(00) = {}^1/_4\,[w_{\nu-1}\,(10) + w_\nu\,(01) + w_\nu\,(\bar{1}0) + w_{\nu-1}\,(0\bar{1})]$$

also stets überhaupt alle zu Gebote stehenden **besten Werte bei der neuen Verbesserung mitbenutzt**[1]). In diesem Falle kann die Ermittlung vorteilhaft in einem einzigen Werteschema vorgenommen werden, indem man stets einfach jede zu verbessernd Zahl ansradiert und an deren Stelle selbst gleich den verbesserten, neuen Wert einsetzt.

Das Mittlungsverfahren darf aber auf keinen Fall eher abgebrochen werden, als bis sich tatsächlich auch im ganzen Schema kein einziger Wert mehr ändert. Man braucht durchaus auch noch nicht annäherungsweise bei den endgültigen Werten angelangt zu sein, wenn nur hier und da bei der vorigen Durchrechnung noch eine Zahl größer oder kleiner geworden ist. Bei nochmaligem Durchrechnen zeigt sich oft, daß alles in der Umgebung einer solchen vorher abgeänderten Zahl, obwohl es bis dahin stimmte, durch diese eine Aenderung umgestoßen wird und neu berechnet werden muß. Um das Verfahren zu beschleunigen, tut man gut, sobald die Funktionswerte beginnen, einigermaßen beständig zu werden, jedesmal wenn sich noch irgendwo eine Zahl ändert, nicht weiterzurechnen, sondern gleich in deren ganzer Nachbarschaft nachzuprüfen, ob dort die bisherigen Werte auch mit dem veränderten Nachbarwert noch Gültigkeit behalten oder nicht, und nötigenfalls auch diese abzuändern.

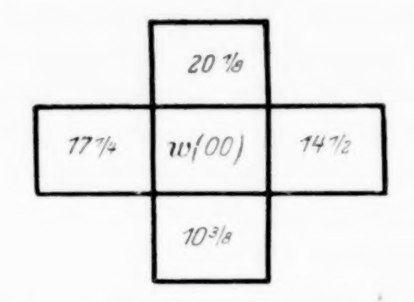
8. Untersuchung der Aufrundungsfehler. Bei praktischen Aufgaben handelt es sich stets darum, zahlenmäßige Werte zu gewinnen, die nach irgend einer bestimmten Anzahl von Stellen abgebrochen sind. In den allerseltensten Fällen aber können diese Ergebnisse einer fertiggerechneten Aufgabe auch noch mit ihrer letzten Stelle die geforderte Bedingung:

$$w\,(00) = {}^1/_4\,[w\,(10) + w\,(01) + w\,(\bar{1}0) + w\,(0\bar{1})]\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\quad(11)$$

streng erfüllen, d. h. die Forderung, daß jeder Funktionswert das arithmetische Mittel der vier Nachbarwerte sei. Vielmehr muß die letzte Stelle gewöhnlich auf- oder abgerundet werden und kann daher nur näherungsweise richtig sein. Diese Abänderungen machen sich in dem gesamten Schema der Funktionswerte in sehr verhängnisvoller Weise bemerkbar. Denn müßten wir an einer Stelle beispielsweise $17\,{}^1/_4$ ins Netz der Gitterpunkte eintragen, während wir aber nur ganze Zahlen führen wollen, so runden wir ab auf 17 und machen dabei einen Fehler von ${}^1/_4$, der bei der Berechnung aller vier Nachbarwerte nun stillschweigend übergangen wird. Der rechts von $17\,{}^1/_4$ stehende Funktionswert $w\,(00)$ etwa habe als weitere Nachbarwerte streng die Zahlen $20\,{}^1/_8$, $14\,{}^1/_2$ und $10\,{}^3/_8$, die mit dem ersten zusammen in der Anordnung:

---

[1]) Herrn Liebmanns Konvergenzbeweis für den quadratischen Bereich stützt sich auf diesen Kunstgriff (l. c.), während wir ihn bisher nicht anwandten.



die Summe $62\,{}^1/_4$ also $w(00) = 15\,{}^9/_{16}$ ergeben. Bei der Vorschrift, daß nur ganze Zahlen gewünscht werden, stehen nun aber in Wirklichkeit als Nachbarwerte von $w(00)$ die folgenden abgerundeten im Schema: 17, 20, 14, 10, die zu der Summe 61, also zu $w(00) = 15\,{}^1/_2$ führen. Rundet man hier nach der Vorschrift ab, so erscheint $w(00) = 15$, während man unter Berücksichtigung der genauen Nachbarwerte richtiger aus $w(00) = 15\,{}^9/_{16}$ auf 16 hätte aufrunden müssen. Mit dem falschen $w(00)$ können dann auch wieder leicht dessen Nachbarwerte gefälscht sein und so fort. Da nun im ganzen Bereich nur die Randwerte wirklich richtig sind, alle anderen Zahlen aber untereinander und mit dem Rand nur durch die angenähert, d. h. bis auf Aufrundungen geltende Ermittlungsgleichung (11) zusammenhängen, so sieht man ein, daß um so beträchtlichere Abweichungen von den wahren Lösungen des linearen Gleichungssystems auftreten können, je weiter innen im Bereich man sich befindet. Wir bezeichnen diese Abweichungen der fertigen Funktionswerte von den gesuchten wahren Lösungen wegen der Ursache ihres Entstehens als »Aufrundungsfehler«.

Um ihrem Auftreten wenigstens etwas entgegenzuarbeiten, kann man die Rechnung in der Weise durchführen, daß der Rest von genau einer halben Einheit der letzten Stelle nicht einfach vernachlässigt, sondern bei den Funktionswerten stets besonders vermerkt wird durch einen Querstrich über der nächst größeren Ziffer der letzten Stelle. So schreibt man also, wenn die Summe beispielsweise 70 beträgt, statt 17 oder 18 genauer $17\,{}^1/_2 = \bar{1}8$ ins Netz der Gitterpunkte ein. Dann kann man auch bei der Bildung der Nachbarwerte diesen Rest von ${}^1/_2$ berücksichtigen und so die Aufrundungsfehler wenigstens etwas herabdrücken.

Die Aufrundungsfehler bedingen die überraschende Erscheinung, daß das Ermittlungsverfahren in der Praxis nicht zu einem eindeutigen Lösungssystem von Funktionswerten führt. Das Schema A, Taf. III, das man sich völlig symmetrisch zu einem Quatrat mit $n = 17$ inneren Gitterpunkten längs jeder Seite, also mit 289 inneren Funktionswerten ergänzt denken muß, entstand beispielsweise dadurch, daß alle ursprünglichen Rohwerte zu groß gewählt wurden. Schema B dagegen zeigt die Fuuktionswerte derselben Aufgabe mit denselben Randwerten, wenn alle Rohwerte zu klein angenommen waren. Bei ihm wie bei A ist die Ermittlung wirklich zu Ende durchgeführt, sodaß kein Wert bei nochmaligem Durchrechnen sich mehr ändern würde. Jedoch sind die Zahlen beider Schemata grundverschieden von einander, und zwar in zunehmendem Maß, je weiter man nach innen geht. Es sind die Aufrundungsfehler, die das erste Mal die Funktionswerte zum Stillstand kommen ließen, als sie noch größer waren als die wahren Lösungen, das andere Mal aber, noch ehe sie von zu kleinen Beträgen aus ansteigend die wahren Werte erreichten. Diese liegen offenbar zwischen denen der Schemata A und B. Um ihnen näher zu kommen, wurde ein weiteres Schema C berechnet, dessen Zahlen jetzt eine Stelle mehr enthielten, als die der beiden vorigen, das also sicher, wenn es ebenso falsch ausfallen sollte als diese, seine Fehler hauptsächlich nur auf diese letzte beschränken, die nächste Stelle aber, die uns gerade interessiert, im wesentlichen richtig geben mußte. Man sieht, die Werte liegen in der Tat etwa in der Mitte zwischen denen der Schemata A und B.

Läßt man weiter bei jeder Zahl von C die letzte Stelle weg und führt mit diesen neuen Rohwerten abermals ein Ermittlungsverfahren durch, so entsteht wieder ein neues Schema D, dessen Werte sich von denen von C überhaupt kaum unterscheiden. So haben wir für dieselbe Aufgabe bereits drei gleichwertige Lösungen gefunden, die sämtlich die Rechenvorschrift völlig erfüllen, daß jeder Wert — bis auf die zulässigen Aufrundungen von weniger als ${}^1/_2$ — das Mittel der umliegenden Werte sei. Aber man sieht ein, daß sich große und kleine, positive und negative Aufrundungsfehler in mannigfach verschiedener Weise so über ein Schema von Funktionswerten verteilen können, daß diese die geforderte Vorschrift erfüllen. Deshalb kann man noch auf viele Lösungen der Auf-

Tafel III.

	200	0	0	0	0	0	0	0	0
200	$12\bar{2}$	43	18	9	6	$\bar{5}$	4	4	4
0		$3\bar{2}$	20	13	10	8	7	7	7
0			17	14	$1\bar{2}$	10	9	9	9
0				13	12	11	10	10	10
0					$1\bar{2}$	11	10	10	10
0						$1\bar{1}$	10	10	10
0							10	10	10
0								10	10
0		A							10

	200	0	0	0	0	0	0	0	0
200	$12\bar{1}$	41	16	7	$\bar{4}$	2	1	1	1
0		$2\bar{9}$	16	9	5	3	2	2	2
0			12	8	5	3	$\bar{3}$	2	2
0				6	$\bar{5}$	3	3	3	3
0					4	3	3	3	3
0						3	3	3	3
0							3	3	3
0								3	3
0		B							3

	2000	0	0	0	0	0	0	0	0
2000	$121\bar{1}$	421	172	83	47	$3\bar{7}$	23	19	18
0		302	183	112	73	52	41	35	33
0			$14\bar{6}$	108	81	$6\bar{4}$	53	47	45
0				$9\bar{4}$	79	68	60	55	$5\bar{4}$
0					$7\bar{4}$	68	63	60	59
0						66	64	62	$6\bar{2}$
0							$6\bar{4}$	63	63
0								63	63
0		C							63

	200	0	0	0	0	0	0	0	0
200	121	42	17	8	$\bar{5}$	3	2	2	2
0		30	18	11	7	5	4	$\bar{4}$	3
0			15	11	8	6	5	5	$\bar{5}$
0				$1\bar{0}$	8	7	6	$\bar{6}$	5
0					$\bar{8}$	7	6	6	6
0						$\bar{7}$	6	6	6
0							6	6	6
0								6	6
0		D							6

gabe stoßen, wenn man nur von geeignet gewählten Rohwerten ausgeht. Sämtliche möglichen Lösungen liegen aber jedenfalls zwischen zwei Schranken, von denen die eine lauter Zahlen mit stets der größtmöglichen Aufrundung enthalten müßte, die andere nur solche, die alle um möglichst viel abgerundet wären.

Wir bezeichnen jetzt den Aufrundungsfehler, um den jeder in einem fertig berechneten Schema stehende Funktionswert $w(x\,y)$ von dem durch Ermittlung nicht erreichbaren wahren Wert abweicht, mit $\varepsilon(x\,y)$. Nennen wir den wahren Wert $W(x\,y)$, so soll sein:

$$w(x\,y) = W(x\,y) + \varepsilon(x\,y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Die Fehler werden dabei dem Vorzeichen nach im Sinn der Ausgleichungsrechnung stets wirklich als Fehler, nicht als Verbesserungen behandelt. Die Ursache für ihr Auftreten besteht nach oben darin, daß viele Funktionswerte $w(x\,y)$ nur bis auf eine gewisse Aufrundung, die $\eta(x\,y)$ heiße, das arithmetische Mittel der Nachbarwerte darstellen. Gleichung (11) wird nicht streng erfüllt, sondern statt dessen ist für eine bestimmte Stelle (00) genau:

$$w(00) = {}^1/_4\,[w(10) + w(01) + w(\bar{1}0) + (0\bar{1})] + \eta(00),$$

oder mit (12)

$$W(00) + \varepsilon(00) = {}^1/_4\,[W(10) + W(01) + W(\bar{1}0) + W(0\bar{1}) + \varepsilon(10) + \varepsilon(01) + \varepsilon(\bar{1}0) + \varepsilon(0\bar{1})] + \eta(00)$$

Da aber für die wahren Werte die Beziehung:

$$W(00) = {}^1/_4\,[W(10) + W(01) + W(\bar{1}0) + W(0\bar{1})]$$

streng gilt, so ergibt sich durch Subtraktion für die Aufrundungsfehler die wichtige Gleichung:

$$\varepsilon(00) = {}^1/_4\,[\varepsilon(10) + \varepsilon(01) + \varepsilon(\bar{1}0) + \varepsilon(0\bar{1})] + \eta(00) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Diese läßt sich — wie die Gl. (11) für die Ermittlung der Funktionswerte selbst — zur numerischen Berechnung der Aufrundungsfehler an jeder Stelle des Bereichs verwenden. Entweder können wir wieder für jeden Innenpunkt des Gitters die zugehörige Gl. (13) hinschreiben und das entstehende System nach seinen Unbekannten ε auflösen. Dies wird aber mit den inhomogenen Gleichungen bei größeren Bereichen nicht leichter gelingen als mit den homogenen für die Funktionswerte. Oder aber — und das ist ein durchaus brauchbarer Weg, für den wir allerdings einen besonderen Konvergenzbeweis schuldig bleiben — wir führen mit Hilfe der Gl. (13) ein dem früheren völlig analoges Ermittlungsverfahren aus, indem wir, da der Rand richtig ist, die festen Randwerte Null ansetzen und dann im Innern geeignete Rohwerte ε mittels der Gl. (13) sukzessive verbessern. Für η ist dabei an jeder Stelle die dort vorgenommene Aufrundung einzusetzen. Natürlich werden die so gewonnenen Fehler ε selbst wieder durch Aufrundungen falsch, und man muß, um sie genügend genau zu erhalten, eine hinreichende Anzahl von Stellen bei ihrer Berechnung mitnehmen.

In dem bezüglich der Diagonale symmetrischen, quadratischen Schema:

	0	0	0	
0	125	107	$5\bar{4}$	0
0	393	250		0
2000	$119\bar{7}$			0
*	2000	0	0	

von neun fertig berechneten inneren Funktionswerten finden beispielsweise folgende Aufrundungen η statt:

0	−1/8	0
1/8	0	
0		

Wir erhalten demnach, wenn wir den linken unteren Eckpunkt des Randquadrates (* im obigen Schema der Funktionswerte) die Koordinaten 0,0 zuschreiben, für die Aufrundungsfehler die Gleichungen:

$$\varepsilon(11) = {}^1/_2\, \varepsilon(12) \qquad \varepsilon(22) = {}^1/_2\, [\varepsilon(12) + \varepsilon(23)]$$
$$\varepsilon(12) = {}^1/_4\, [\varepsilon(11) + \varepsilon(13) + \varepsilon(22)] + {}^1/_8 \qquad \varepsilon(23) = {}^1/_4\, [\varepsilon(13) + \varepsilon(22) + \varepsilon(33)] - {}^1/_8$$
$$\varepsilon(13) = {}^1/_4\, [\varepsilon(12) + \varepsilon(23)] \qquad \varepsilon(33) = {}^1/_2\, \varepsilon(23).$$

Ihre Auflösung läßt sich noch leicht streng leisten und führt zu folgenden Werten ε:

0	−1/7	−1/14
1/7	0	
1/14		

Die hiernach richtig gestellten Funktionswerte:

125	107 1/7	53 4/7
392 6/7	250	
1196 3/7		

erfüllen die Forderung, daß jeder Wert das Mittel der vier umgebenden sei, nun auch tatsächlich streng. Somit ergibt sich ein Weg, den wahren Werten W beizukommen. Berechnet man die Fehler ε streng, so erhält man die W genau. Werden die Fehler aber nur durch Approximation ermittelt, also selbst etwas falsch, so gelangt man mit ihrer Hilfe wenigstens zu Funktionswerten, die den W sehr nahe liegen.

Um eine Vorstellung von der Größe der Aufrundungsfehler zu geben, die im schlimmsten Fall auftreten könnten, wenn an jeder Stelle die größte überhaupt mögliche Aufrundung η stattfände, haben wir die hierfür in Betracht kommenden Gleichungssysteme bei einigen quadratischen Bereichen streng aufgelöst. Bei Verwendung des oben eingeführten Querstrichs für den Rest $^1/_2$ beträgt die größte je vorkommende Aufrundung $^3/_8$ der letzten Stelle, die in die Gleichungssysteme überall für η einzusetzen war. Sie entsteht in Wirklichkeit dann, wenn die durch vier zu dividierende Summe der Nachbarwerte um $1^1/_2$ der letzten Stelle über oder unter der nächsten durch vier teilbaren Zahl liegt. Die Feinheit der Gittereinteilung ist in der folgenden Tabelle 1 wie bisher durch die

Anzahl n der inneren Gitterpunkte längs einer Quadratseite ausgedrückt. Der Koordinatenanfang (00) liegt wie bei dem Beispiel des vorigen Abschnitts im linken unteren Eckpunkt des Randquadrates. Die Zahlen der Tabelle geben die **maximalen Aufrundungsfehler** in Einheiten der letzten Stelle:

Tabelle 1.

	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$\varepsilon(11)$	0,75	1,031	1,25	1,428
$\varepsilon(12)$		1,313	1,75	2,106
$\varepsilon(13)$				2,308
$\varepsilon(22)$		1,688	2,50	3,188
$\varepsilon(23)$				3,519
$\varepsilon(33)$				3,894

Bei quadratischen wie überhaupt bei allen symmetrischen Bereichen sind symmetrisch gelegene Werte ε gleich groß, brauchen also nur einmal berechnet zu werden. Denn die Maximalfehler sind unabhängig von der Größe der Funktionswerte, da sie sich allein infolge der größtmöglichen Aufrundungen von $^3/_8$ additiv über die wahren Werte lagern. Nur die Entfernung vom Rand des Bereichs ist für ihre Größe maßgebend. Man muß sich also die Werte der Tabelle 1 für die einzelnen Quadrate symmetrisch wiederholt denken.

Bei größeren quadratischen Bereichen kann man durch eine rohere Schätzung auf einfachem Weg wenigstens zu **oberen Schranken für die Maximalfehler** gelangen. Auf einfachem Ueberlegungen folgt, daß auf jedem zum Rand konzentrischen Innenquadrat von Gitterpunkten stets der kleinste Maximalfehler in der Ecke, der größte aber bei der Mitte der Quadratseite liegen muß, und die Beträge wachsen mehr und mehr an, je weiter man nach innen kommt. Setzt man also für alle Maximalfehler eines jeden solchen Innenquadrats den größten bei der Seitenmitte ein, so erhält man für ein jedes nur noch je eine Fehlergleichung (13), also im ganzen für einen quadratischen Bereich mit n inneren Gitterpunkten längs einer Seite des Randes nur $n/2$ Gleichungen, wenn n gerade, und $\frac{n+1}{2}$ Gleichungen, wenn es ungerade ist. Das entstehende System ist so einfach, daß man es leicht auch noch für größeres n streng auflösen kann. Verstehen wir unter $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_i$ diese Schranken für die größten Maximalfehler auf dem ersten, zweiten, ... innersten Innenquadrat, so ergeben sich in Einheiten der letzten Stelle beispielsweise folgende Werte:

Tabelle 2.

	$n=3$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=12$
ε_1	1,875	3,375	3,75	4,875	8,25
ε_2	2,250	5,250	6,00	8,250	15,00
ε_3		5,625	6,75	10,125	20,25
ε_4				10,500	24,00
ε_5					26,25
ε_6					27,00

die freilich, wie ein Vergleich mit Tabelle 1 zeigt, viel zu groß sein dürften gegenüber den wirklich möglichen Maximalfehlern.

Alle diese Betrachtungen weisen darauf hin, daß die Aufrundungsfehler schon von wesentlichem Einfluß auf die durch »Mittlung« berechneten Funktionswerte sein können und daher bei Aufgaben, die einige Genauigkeit erfordern, wohl der Beachtung verdienen. Ueber den Unterschied zwischen den Lösungen der Differenzengleichung und der Differentialgleichung sagen sie freilich nichts aus.[1])

[1]) Vergl. hierzu die Anmerkung 1 der Einleitung.

II. Die zweite Randwertaufgabe für harmonische Funktionen.

9. Die Problemstellung. Unter der zweiten Randwertaufgabe versteht man bei der Differentialgleichung $\Delta w = 0$ das Problem, die harmonische Funktion w im Innern eines Bereichs dann zu finden, wenn auf dem Rand statt der Funktion selbst ihre partielle Ableitung nach der nach innen gerichteten Normalen, $\frac{\partial w}{\partial n}$, gegeben ist[1]). Dabei muß das über den Rand erstreckte Integral:

$$\oint \frac{\partial w}{\partial n} ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

sein. Natürlich wird hierdurch w nur bis auf eine Konstante bestimmt, und man muß noch in irgend einem Punkt des Randes oder des Innern die Funktion selbst vorgeben, um die Lösung eindeutig zu machen.

Im Falle der Rechnung mit endlichen Differenzen in einem wie früher in den Bereich eingetragenen System von Gitterpunkten ersetzen wir an jeder Stelle längs des Randes die Ableitung $\frac{\partial w}{\partial n}$ durch die Differenz:

$$d = w - r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

zwischen dem Funktionswert w auf dem ersten Innenring von Gitterpunkten und dem ihm benachbarten Randwert r und bezeichnen sie kurz als »Steigung«. Da es sich hier wie im folgenden meist nur um die Betrachtung irgend zweier unmittelbar benachbarter Werte auf dem ersten Innenring und dem Rand handelt, können wir uns jetzt die genauere Bezeichnung der Funktionswerte durch die Koordinaten der Gitterpunkte gewöhnlich sparen. Die Aufgabe ist dann, aus einem gegebenen System von Steigungen d und einem einzigen Funktionswert diejenige Gitterfunktion w im Bereich zu ermitteln, die an einer vorgeschriebenen Stelle diesen Wert annimmt und überall längs des Randes die geforderten Steigungen besitzt. Die Bedingung (14) geht dabei für die endlichen Verhältnisse über in die Forderung, daß die Summe aller Steigungen längs der ganzen Begrenzung verschwinde, daß also:

$$\Sigma d = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

sei. Nur wenn die d diese Bedingung erfüllen, ist die Aufgabe überhaupt lösbar.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung einzusehen, denken wir uns in einem beliebigen Gitterbereich, dessen Rand mit der Gittereinteilung zusammenfällt, die erste Randwertaufgabe mit irgendwelchen auf dem Rand gegebenen Funktionswerten bereits gelöst. Dann gilt für jeden Innenpunkt (00) theoretisch streng die Ermittlungsgleichung:

$$w(10) + w(01) + w(\bar{1}0) + w(0\bar{1}) - 4\,w(00) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Schreibt man diese für jede Stelle des ganzen Bereichsinnern an und addiert alle Gleichungen, so braucht man nur jeden in der Summe vorkommenden Randwert r durch den ihm benachbarten Wert w des ersten Innenrings und die zwischenliegende Steigung d, also nach (15) durch $w - d$ zu ersetzen, und sieht sofort, daß sämtliche w sich herausheben, daß also nur die behauptete Gleichung $\Sigma d = 0$ stehen bleibt. An einspringenden Ecken hat man dabei den einzigen zweimal auftretenden Randwert auf beide möglichen Arten durch zwei verschiedene Nachbarwerte des ersten Innenrings und die zugehörigen Steigungen auszudrücken. Dann bietet der Nachweis auch bei ganz allgemeinen Bereichen keine Schwierigkeit.

10. Das Näherungsverfahren für das zweite Randwertproblem. Wenn nun ein dieser Bedingung unterworfenes System von Steigungen d und außerdem an einer einzigen Stelle des betrachteten Bereichs der Wert der Funktion selbst vorgegeben ist, so gelangt man dadurch zur Lösung des zweiten Randwertproblems, daß man die Aufgabe in zwei getrennte Teile zerlegt. Der erste besteht darin, durch sukzessive Annäherung die Werte irgend einer beliebigen harmonischen Gitterfunktion zu finden, die nur längs des Randes die vorgeschriebenen Steigungen d besitzen soll. Dann bedeutet der zweite Teil noch eine Parallelverschiebung des ganzen Wertesystems bis in die Lage, in der an der vorgeschriebenen Stelle der gegebene Funktionswert angenommen wird. Die Steigungen längs des Randes werden hierdurch nicht mehr geändert. Da dieser zweite Teil der Aufgabe keinerlei Schwierigkeiten bietet, handelt es sich im wesentlichen

[1]) Encyclop. der math. Wissensch. II. A. 7b. Nr. 17.

nur darum, irgend eine beliebige harmonische Gitterfunktion mit den in der Aufgabe geforderten Steigungen d längs des Randes durch Approximation zu finden.

Man schreibt hierzu den Randpunkten des Bereichs zunächst irgendwelche Werte r_0 zu, die bei der praktischen Durchführung natürlich möglichst günstig gewählt werden, (vergl. **11**) an und für sich aber vollkommen willkürlich sind. Mit diesen r_0 wird dann im Innern des Bereichs durch das gewöhnliche Mittlungsverfahren die Funktion w_0 berechnet, die die Differenzengleichung (11) überall streng erfüllt. Von etwaigen Aufrundungsfehlern sehen wir einstweilen ab. Natürlich treten jetzt im allgemeinen längs des Randes **nicht** die vorgeschriebenen Steigungen d, sondern statt dessen irgend welche andern, d_0, auf, die mit einander benachbarten Werten w_0 und r_0 zusammenhängen durch die Gleichung:

$$d_0 = w_0 - r_0.$$

Der erste Schritt der Annäherung geschieht dann dadurch, daß man aus den w_0 des ersten Innenrings einen neuen Rand herleitet von verbesserten Werten r_1, die sich an jeder Stelle von dem benachbarten w_0 des ersten Innenrings um die dort in der Aufgabe geforderte Steigung d unterscheiden. Man bildet also an jedem Punkt des neuen Randes:

$$r_1 = w_0 - d.$$

Da eine einspringende Ecke des Randes immer zwei Stellen des ersten Innenrings als Nachbarpunkte besitzt, könnte man hiernach in solchen Fällen zwei neue Randwerte berechnen, nämlich (mit der nebenstehenden Koordinatenbezeichnung) entweder:

$$r_1(0) = w_0(1) - d(0,1) \quad \text{oder} \quad r_1(0) = w_0(2) - d(0,2).$$

Am zweckmäßigsten wählen wir das arithmetische Mittel, setzen also als neuen Randwert bei einer einspringenden Ecke fest:

$$r_1(0) = {}^1/_2\,[w_0(1) - d(0,1) + w_0(2) - d(0,2)].$$

Mit dem so gewonnenen neuen Rand von Werten r_1 wird wieder durch Mittlung eine neue harmonische Gitterfunktion w_1 im Innern berechnet, die jedoch gewöhnlich auch jetzt noch nicht die vorgeschriebenen Steigungen d gegenüber den Randwerten r_1, sondern andere:

$$d_1 = w_1 - r_1$$

besitzen wird. Deshalb berechnet man abermals in einem neuen Schritt wieder aus den w_1 des ersten Innenrings unter Zugrundlegung der geforderten Steigungen d einen neuen Rand von verbesserten Werten:

$$r_2 = w_1 - d, \quad \text{bzw.} \quad r_2(0) = {}^1/_2\,[w_1(1) - d(0,1) + w_1(2) - d(0,2)]$$

bei einspringenden Ecken, und hieraus folgen durch abermalige Mittlung im Innern die Werte einer weiteren Gitterfunktion w_2, deren Steigungen nun gleich:

$$d_2 = w_2 - r_2$$

sind, und so fort.

Ganz allgemein hat man beim ν-ten Schritt des Verfahrens:

Erstens aus dem beim vorhergehenden Schritt im Werteschema $\nu - 1$ berechneten $w_{\nu-1}$ des ersten Innenrings neue, bessere Randwerte r_ν herzuleiten, indem man an jede gewöhnliche Stelle des Randes im Schema ν die Differenz einsetzt zwischen dem Nachbarwert $w_{\nu-1}$ des ersten Innenrings im Schema $\nu - 1$ und der für diese Stelle geforderten Steigung d. Man bildet hier also jeweils:

$$r_\nu = w_{\nu-1} - d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Bei einspringenden Ecken dagegen ist das arithmetische Mittel aus den beiden möglichen Werten zu nehmen, also:

$$r_\nu(0) = {}^1/_2\,[w_{\nu-1}(1) - d(0,1) + w_{\nu-1}(2) - d(0,2)] \quad \ldots\ldots \quad (19).$$

Zweitens wird aus diesen verbesserten Randwerten r_ν durch Mittlung nach der Differenzengleichung (11) im Innern des Bereiches eine neue harmonische Gitterfunktion w_ν hergeleitet.

Ihre Werte auf dem ersten Innenring bilden mit den benachbarten Randwerten r_ν die Steigungen:

$$d_\nu = w_\nu - r_\nu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

Daher ist das Verfahren mit demjenigen Schritt ν beendet, mit dem längs der ganzen Begrenzung des Bereichs an jeder Stelle praktisch $d_\nu = d$, also gleich der in der Aufgabe geforderten Steigung geworden ist.

11. Beispiel. Wahl der ersten Randwerte. In Tafel IV wird ein Beispiel für dieses Annäherungsverfahren bei einem Quadrat mit 25 inneren Gitterpunkten in seinen ersten Schritten wirklich durchgeführt und schließlich das Endergebnis angegeben. Die geforderten Steigungen d, die die Bedingung (16) erfüllen, sind in dem ersten Schema für sich eingetragen. Außerdem wird verlangt, daß der in der linken oberen Ecke des ersten Innenrings auftretende Funktionswert, also unter Annahme desselben Koordinatensystems wie bei den Beispielen von **8.** der Wert w (15) gleich 50 sei. Zwölf Schritte der Annäherung genügen, um den ersten Teil der Aufgabe zu erledigen: Zwischen den ermittelten w_{12} des ersten Innenrings und den Randwerten liegen tatsächlich genau die ursprünglich geforderten Steigungen d. Um nun auch den zweiten Teil der Aufgabe durchzuführen, hat man nur noch die Differenz, um die der linke obere Eckwert 36 des ersten Innenrings von dem verlangten, 50, abweicht, also den konstanten Betrag 14 zu jedem Funktionswert des fertigen Schemas zu addieren. So entstehen diejenigen Werte w, die die Lösung der Aufgabe darstellen.

Tafel IV.

d

	10	11	12	15	20	
20						−2
30						−15
40						−30
20						−20
6						−10
	−30	−45	−30	−5	3	

w_0

	40	45	50	55	60	
30	43	57̄	69	81	92	100
20	47	69	88	107	128̄	150
10	55	85	108̄	130	161	220
40	78̄	108	127	143	165	200
60	107	141	149	150̄	156	170
	150	200	180	150	140	

w_1

	33	46̄	57	66	72	
23	40̄	56	71	84	93	94
17	46	69	88	105	122	143̄
15	58	86̄	106	125	149	191
58̄	85	109	126	140	158	185
101	116	140	149	150	157	166
	137	186	179	155̄	153	

w_2

	30̄	45	59	69	73	
20̄	38	56	72̄	84	93	95
16	46	69	87	103	119	137
18	60	86	105	123̄	144	179
65	90̄	111	126	138	154	178
110	122	142	149	150̄	156	167
	146	185	179	155	154	

w_3

	28	45	60̄	69	73	
18	37	56	72	84	93̄	95
16	46	69	87	103	118	134
20	61	87	106̄	122	142̄	174
70̄	92	112	126	137	152	174
116	126	144̄	149	149	155	166
	152	187	179	155̄	153	

w_{12}

	26	44	58	67	70	
16	36	55	70	82	90	92
16	46	69	86	101	115	130
24	64	88	105	120	138	168
78	98	116̄	127	136	149	169
129	135	143	151	148	152	162
	165	194	181	153	149	

w

	40	58	72	81	84	
30	50	69	84	96	104	106
30	60	83	100	115	129	144
38	78	102	119	134	152	182
92	112	130̄	141	150	163	183
143	149	163	165	162	166	176
	179	208	195	167	163	

η

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	0	0
$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	0	0

Natürlich hängt die Anzahl der beim ersten Teil des Verfahrens durchzurechnenden Schritte der Annäherung wesentlich von einer günstigen Wahl der anfänglichen Randwerte r_0 ab. Man sucht sich hierzu zunächst mit Hilfe der gegebenen Steigungen d ein angenähertes Bild vom Aussehen der Fläche zu machen, die die gesuchte Funktion w geometrisch darstellt. An ihren voraussichtlich tiefsten Punkt setzen wir in das Schema der Randwerte r_0 eine beliebige Zahl ein, — es handelt sich beim ersten Teil der Aufgabe ja nur um die relative Größe der w — die nur zweckmäßigerweise um so viel größer als Null sein soll, daß auch bei der Durchführung der Annäherung nie negative Zahlen neben den positiven im Schema vorkommen. Man vermeidet damit eine wesentliche Quelle von Rechenfehlern und unnötiger Mühe. In unserem Beispiel scheint die Fläche der w

wegen der großen Steigung $d = 40$ bei der Mitte der linken Randseite ihren tiefsten Punkt zu besitzen, weshalb dort als erster Wert $r_0 = 10$ eingetragen wurde. Um den hiernach zu erwartenden Wert r_0 an der gegenüberliegenden Mitte der rechten Randseite zu erhalten, an der $d = -30$ vorgeschrieben ist, nehmen wir an, die Steigungen nähmen beim Durchschreiten des ganzen Bereiches, immer in derselben Richtung gerechnet, linear von 40 bis 30 ab. Wir brauchen demnach zu dem Anfangswert 10 einfach die Summe der vermuteten sechs zwischenliegenden Steigungen: $6 \cdot \frac{40+30}{2} = 210$ zu addieren und gelangen so zu dem gegenüberliegenden Randwert $r_0 = 220$. Wegen der, absolut genommen, noch größeren Steigung von -45 an der unteren Randseite wäre hiernach dort ein noch größerer Randwert als 220 einzusetzen, was jedoch, um die Wirkung einer solchen falschen Annahme zu untersuchen, nicht geschah. An Hand dieser drei ersten Randwerte ist es nun mit einiger Erfahrung über das Aussehen der durch harmonische Gitterfunktionen dargestellten Flächen auch nicht schwer, die zwischenliegenden Randwerte einigermaßen richtig zu ergänzen. Bei der Durchrechnung spürt man jedoch deutlich den ungünstigen Einfluß der falschen Wahl des größten Wertes auf der unteren Randseite. In seiner Umgebung dauert es am längsten, bis die Funktionswerte die geforderten Steigungen annehmen.

Das Verfahren verlangt, da bei jedem Schritt eine neue Gitterfunktion gemittelt werden muß, und da dies jeweils nur durch vollständige Durchführung der Aufgabe im ganzen Bereich möglich ist wesentlich mehr Mühe als die Lösung der ersten Randwertaufgabe. Man erkennt jedoch aus dem Beispiel, daß die Randwerte r und daher auch die w der verschiedenen Schritte sich nur wenig von einander unterscheiden. Daher kann man jedesmal sehr leicht gute Rohwerte für die zu mittelnden w des folgenden Schrittes aus denen des vorigen ableiten, so daß die sich anschließende Mittlung selbst sehr rasch erledigt ist. Später ändern sich die Randwerte und die w an den meisten Stellen überhaupt nicht mehr. Dann braucht man den größten Teil des neuen Werteschemas nur noch von dem vorigen abzuschreiben. Die neuen Randwerte können mit Vorteil auch so gewonnen werden, daß man sie, anstatt sie mit Hilfe der Steigungen d nach Gleichung (18) bzw. (19), zu berechnen, einfach gegenüber den Randwerten des vorigen Schemas um ebensoviel abändert, als sich die letzten w des ersten Innenrings gegenüber den vorhergehenden änderten.

12. Die Aufrundungsfehler. Natürlich werden auch bei diesem Verfahren die Werte, die die Gitterlösung der zweiten Randwertaufgabe darstellen sollen, infolge der unvermeidlichen Aufrundungen in der letzten Stelle mehr oder weniger fehlerhaft. Es sind auch hier je nach der Wahl der Rohwerte innerhalb gewisser Grenzen verschiedene Lösungen der gestellten Aufgabe möglich (vgl. **8**). Im Gegensatz zu dem ersten Randwertproblem, bei dem alle Randwerte vorgegeben werden, also sämtliche fehlerfrei sind, hat man aber hier nur immer einen einzigen richtigen Funktionswert, im Falle unseres Beispiels den Wert $w(15) = 50$. Da alle anderen Funktionswerte durch die jedesmal nur bis auf eine Aufrundung erfüllte Ermittlungsgleichung (11) mit diesem einzigen richtigen Wert zusammenhängen, so sind hier viel größere Aufrundungsfehler möglich, als bei der ersten Randwertaufgabe. Die Randwerte besitzen jetzt jeweils denselben Fehler wie die ihnen benachbarten Werte des ersten Innenringes. Denn sie hängen mit diesen nach Beendigung der Rechnung durch die Gleichung (15) streng zusammen, ohne daß weitere Aufrundungen stattfinden.

Auch bei der zweiten Randwertaufgabe besteht im übrigen nach ganz den gleichen Ueberlegungen wie in **8.** zwischen den Aufrundungsfehlern ε und der jeweiligen Aufrundung η die Beziehung:

$$\varepsilon(00) = {}^1/_4\,[\varepsilon(10) + \varepsilon(01) + \varepsilon(\bar{1}0) + \varepsilon(0\bar{1})] + \eta(00) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Wird für η überall speziell die größtmögliche Aufrundung von $^3/_8$ der letzten Stelle eingesetzt, so ergeben sich die maximal möglichen Fehler. Mit den obigen Feststellungen über die Fehler der Randwerte erhalten wir in diesem Fall in dem Koordinatensystem der Beispiele von **8.**, wenn wir etwa entsprechend einem vorgegebenen $w(11)$ den Fehler $\varepsilon(11) = 0$ voraussetzen, bei den beiden Quadraten mit $n = 2$ und $n = 3$ inneren Gitterpunkten längs einer Randseite durch strenges Auflösen der betreffenden Gleichungssysteme die Werte:

Tabelle 3.

	$n=2$	$n=3$
$\varepsilon\,(12)$	2,25	6,000
$\varepsilon\,(13)$		8,4375
$\varepsilon\,(22)$	3,00	8,0625
$\varepsilon\,(23)$		9,375
$\varepsilon\,(33)$		10,125

(in Einheiten der letzten Stelle.)

Sie sind tatsächlich wesentlich größer als die entsprechenden Zahlen für die erste Randwertaufgabe in Tabelle 1. Die noch fehlenden Werte hat man sich hier symmetrisch zu der durch den Punkt (11) laufenden Diagonalen ergänzt zu denken. Natürlich werden die wirklichen Aufrundungsfehler bei einer bestimmt vorliegenden Aufgabe auch hier meist kleiner als diese Maximalfehler, da die wirklichen Aufrundungen η in praktischen Fällen gewöhnlich kleiner als $^3/_8$ und häufig von wechselndem Vorzeichen sind. Die zum Schluß des Beispiels auf Taf. IV ausgerechneten η bestätigen dies.

13. Der Beweis für die Konvergenz unseres Annäherungsverfahrens erfordert nur, für den ersten Teil der Aufgabe zu zeigen, daß die durch Gl. (20) definierte Steigung d_ν mit unbegrenzt wachsender Schrittzahl ν der an jeder Stelle geforderten Steigung d beliebig nahe kommt. Wenn also

$$\delta_\nu = d_\nu - d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

gesetzt wird, so soll werden:

$$\lim_{\nu \to \infty} \delta_\nu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Mit dem Nachweis dieser Gleichung ist die Konvergenz für beliebige Bereiche, auch für solche mit einspringenden Ecken gezeigt. Um zu einer Abschätzung von δ_ν zu gelangen, führt man zweckmäßig das allgemeine Problem auf den besonderen Fall zurück, daß eine Funktion mit der speziellen, längs des ganzen Randes konstanten Steigung Null approximiert werden soll. Hierzu nehmen wir an, r und w seien irgendwelche benachbarten Werte auf dem Rand und dem ersten Innenring, die sich schon um die an dieser Stelle geforderte Steigung d unterscheiden, also Werte einer harmonischen Gitterfunktion, die bereits eine Lösung des ersten Teiles unserer Aufgabe darstellt. Dann können wir für die Näherungswerte des ν-ten Schrittes setzen:

$$r_\nu = r + \varrho_\nu\,, \qquad w_\nu = w + q_\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23),$$

worin ϱ_ν und q_ν die Abweichungen der Näherungswerte von r und w bedeuten. Da hierbei r_ν und w_ν nach **10.** und ebenso r und w als endgültige Lösung der ersten Teilaufgabe jeweils eine harmonische Gitterfunktion darstellen, so müssen auch ϱ_ν und q_ν als ihre Differenz notwendig Werte einer harmonischen Gitterfunktion sein. Ihre Steigung, $q_\nu - \varrho_\nu$, erhalten wir, wenn wir in Gl. (20) d_ν, w_ν und r_ν mittels der in (21) und (23) eingeführten Größen ausdrücken und die von den r und w erfüllte Gleichung $d = w - r$ (15) subtrahieren. Dadurch entsteht die Steigung:

$$q_\nu - \varrho_\nu = \delta_\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Damit ist für jeden Schritt ν, wenn die Werte r, w stets dieselben bleiben, an die Stelle der Näherungsfunktion r_ν, w_ν die Funktion der Abweichungen ϱ_ν, q_ν getreten, und wir beweisen das oben geforderte Verschwinden von δ_ν, wenn wir zeigen, daß die Steigungen, dieser neuen Funktion mit fortgesetzter Wiederholung des Verfahrens Null werden. Dieser Nachweis beruht auf der jetzt besonders einfachen Bildung neuer Randwerte ϱ_ν aus den $q_{\nu-1}$ des ersten Innenringes beim Uebergang von einem Schritt zum folgenden. Die Gl. (18) für gewöhnliche Randpunkte geht nämlich mit den in (23) eingeführten Bezeichnungen über in die neue:

$$r + \varrho_\nu = w + q_{\nu-1} - d,$$

aus der durch Subtraktion der Gl. (15) folgt:

$$\varrho_\nu = q_{\nu-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Für einspringende Ecken erhalten wir dagegen mit den neuen Bezeichnungen statt Gl. (19):

$$r\,(0) + \varrho_\nu\,(0) = {}^1/_2\,[w\,(1) + q_{\nu-1}\,(1) - d\,(0{,}1) + w\,(2) + q_{\nu-1}\,(2) - d\,(0{,}2)].$$

Da jetzt, wie man leicht nachprüft:

$$r(0) = {}^1/_2 \,[w(1) - d(0,1) + w(2) - d(0,2)]$$

ist, so folgt durch Subtraktion:

$$\varrho_\nu(0) = {}^1/_2 \,[\varphi_{\nu-1}(1) + \varphi_{\nu-1}(2)] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26).$$

Die ν-ten Randwerte gehen also an gewöhnlichen Stellen nach Gl. (25) aus den Werten auf dem ersten Innenring des $(\nu-1)$-ten Schrittes einfach dadurch hervor, daß man diese jeweils unverändert auf die benachbarten Randpunkte hinausrückt. Nur bei einspringenden Ecken tritt wegen (26) an die Stelle eines einzigen das arithmetische Mittel zweier benachbarter Werte des ersten Innenringes vom vorhergehenden Schritt $\nu-1$. Ein Vergleich der Formeln (25) und (26) mit den allgemeinen (18) und (19) zeigt, daß die Aufgabe jetzt tatsächlich dahin spezialisiert worden ist, eine Funktion mit der längs des ganzen Randes konstanten Steigung Null zu approximieren.

Um hierfür das Verschwinden der Steigungen δ_ν mit unbegrenzt wachsendem ν nachzuweisen, setzen wir alle anfänglich gegebenen Randwerte ϱ_0 positiv voraus. Dies schränkt die Allgemeinheit der Betrachtung nicht ein, da ja die Lösung des Annäherungsverfahrens überhaupt nur bis auf eine Konstante bestimmt ist. Für jedes ν sei der größte aller Randwerte ϱ_ν gleich M_ν, der kleinste gleich m_ν und

$$M_\nu - m_\nu = D_\nu$$

gesetzt. Ferner werden wir im folgenden für jeden Schritt eine obere Schranke G_ν angeben, die sicher nicht von M_ν übertroffen wird, und eine untere Schranke g_ν, von der wir mit Bestimmtheit aussagen können, daß niemals m_ν sie unterschreitet. Schließlich sei:

$$G_\nu - g_\nu = \Delta_\nu.$$

Dann gilt wie bei den streng harmonischen Funktionen, die der Laplaceschen Differentialgleichung genügen, auch für jeden Innenwert φ:

$$g_\nu \leq m_\nu < \varphi_\nu < M_\nu \leq G_\nu,$$

solange nicht schon alle Werte im Schema überhaupt einander gleich sind, womit sich der weitere Beweis erübrigte. Hieraus folgt zunächst:

$$D_\nu \leq \Delta_\nu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27).$$

Weiter muß aber wegen (24) auch:

$$|\,\delta_\nu\,| < D_\nu,$$

oder erst recht:

$$|\,\delta_\nu\,| < \Delta_\nu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

sein. Wenn wir also zeigen, daß Δ_ν mit unbegrenzt wachsendem ν gegen Null strebt, so gilt dasselbe für δ_ν, und der Nachweis der Konvergenz unseres Verfahrens ist erbracht.

Hierzu ist zu beachten, daß jeder Wert einer Gitterfunktion w im Innern eines Bereiches ganz allgemein, wenn wir das alle w bestimmende Gleichungssystem auflösten, sich darstellen würde als lineare Funktion der Randwerte[1]. Bezeichnen wir die Randpunkte kurz mit 1, 2 . . . τ, so besteht in unserem speziellen Fall insbesondere für jedes φ_ν des ersten Innenringes eine Gleichung der Form:

$$\varphi_\nu(\varrho_\nu(1), \varrho_\nu(2) \ldots \varrho_\nu(\tau)) = a_1\,\varrho_\nu(1) + a_2\,\varrho_\nu(2) + \ldots a_\tau\,\varrho_\nu(\tau) \quad . \; . \quad (29).$$

Für verschiedene Punkte erhält man so natürlich verschiedene Werte φ_ν, da jedesmal die Gewichtskoeffizienten a_λ andere sind. Immer bedeuten diese aber dabei positive, echte Brüche, deren Gesamtsumme jeweils gleich Eins ist[2]. Nun denken wir uns von allen möglichen nach (29) dargestellten φ_ν des ersten Innenringes dasjenige ausgesucht, in dem in bezug auf alle Punkte des ersten Innenringes der allerkleinste Gewichtkoeffizient a auftritt. Damit sind sämtliche Koeffizienten von (29) bestimmt festgelegt, wir bezeichnen sie daher jetzt mit c_λ. Den kleinsten nennen wir insbesondere c_μ, wobei also sein sollte:

$$c_\mu \leq a_\lambda \text{ für alle } \lambda \text{ und } c_\mu \leq c_\lambda \text{ für alle } \lambda \neq \mu \quad . \; . \; . \; . \quad (30).$$

Für unser spezielles φ_ν des ersten Innenringes gelte also die Darstellung:

$$\varphi_\nu = c_1\,\varrho_\nu(1) + c_2\,\varrho_\nu(2) + \ldots + c_\lambda\,\varrho_\nu(\lambda) + \ldots + c_\mu\,\varrho_\nu(\mu) + \ldots + c_\tau\,\varrho_\nu(\tau),$$

wobei auch:

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_\lambda + \ldots + c_\mu + \ldots + c_\tau = 1.$$

---

[1] Vgl. H. Liebmann, l. c.

[2] Dies letztere ergibt sich sofort, wenn man alle Randwerte gleich Eins setzt.

Der größte Wert, den dieses φ_ν überhaupt als Funktion der Randwerte annehmen kann, ist:

$$c_1 M_\nu + c_2 M_\nu + \ldots + c_\lambda M_\nu + \ldots + c_\mu m_\nu + c_{\mu+1} M_\nu + \ldots + c_\tau M_\nu \quad (31),$$

also derjenige Ausdruck, in dem alle Randwerte durch ihren größten M_ν ersetzt werden bis auf einen einzigen, für den wir m_ν einsetzen müssen, da dieser kleinste Wert sicher irgendwo auf dem Rand wenigstens einmal auftreten muß, und dabei wird m_ν gerade mit dem kleinsten Koeffizienten c_μ multipliziert. Wäre nämlich etwa der Ausdruck:

$$c_1 M_\nu + c_2 M_\nu + \ldots + c_\lambda m_\nu + c_{\lambda+1} M_\nu + \ldots + c_\mu M_\nu + \ldots + c_\tau M_\nu$$

noch größer als der obige (31), so wäre:

$$c_\mu (M_\nu - m_\nu) > c_\lambda (M_\nu - m_\nu) \quad \text{oder} \quad c_\mu > c_\lambda$$

gegen unsere Voraussetzung (30). Wie man also auch die Randwerte wählen mag, sicher wird unser spezielles φ_ν des ersten Innenringes nie größer als der Ausdruck (31), oder wir können dafür auch schreiben:

$$\varphi_\nu \leq M_\nu (1 - c_\mu) + m_\nu c_\mu \quad \ldots \ldots \ldots \quad (32).$$

Diese Ungleichung gilt nun aber überhaupt für alle φ_ν des ersten Innenringes ganz allgemein. Denn einmal kann nach den gleichen Ueberlegungen wie oben überhaupt keines von allen durch (29) dargestellten φ_ν größer werden als:

$$M_\nu \cdot (1 - a_\mu) + m_\nu a_\mu,$$

wenn wir unter a_μ immer den kleinsten von allen Koeffizienten in der jeweiligen Darstellung (29) verstehen. Andererseits kann nicht:

$$M_\nu (1 - a_\mu) + m_\nu a_\mu > M_\nu (1 - c_\mu) + m_\nu c_\mu$$

sein, da wir $\quad c_\mu \leq a_\mu \quad$ und $\quad m_\nu < M_\nu$

vorausgesetzt haben. Der Ausdruck (32) bildet also tatsächlich eine obere Schranke für alle Werte φ_ν des ersten Innenringes. Durch vollkommen analoge Ueberlegungen gelangt man zu einer unteren Schranke für alle diese φ_ν, wenn man einfach in der rechten Seite von (32) M_ν und m_ν miteinander vertauscht.

Da nun die Randwerte für jeden folgenden Schritt des Näherungsverfahrens nach den Gleichungen (25) und (26) aus den Werten des ersten Innenrings gebildet werden, so erhalten wir jetzt folgende Schranken $G_{\nu+1}$ und $g_{\nu+1}$, zwischen denen in jedem Fall alle $\varrho_{\nu+1}$ liegen müssen:

$$G_{\nu+1} = M_\nu (1 - c_\mu) + m_\nu c_\mu = M_\nu (1 - c_\mu) + (M_\nu - D_\nu) c_\mu, \qquad g_{\nu+1} = m_\nu (1 - c_\mu) + M_\nu c_\mu.$$

Durch Subtraktion folgt:

$$G_{\nu+1} - g_{\nu+1} = \Delta_{\nu+1} = D_\nu (1 - 2 c_\mu),$$

oder wegen (27) auch: $\quad \Delta_{\nu+1} \leq \Delta_\nu (1 - 2 c_\mu).$

Insbesondere wird also:

$$\Delta_1 \leq \Delta_0 (1 - 2 c_\mu), \qquad \Delta_2 \leq \Delta_1 (1 - 2 c_\mu) \leq \Delta_0 (1 - 2 c_\mu)^2, \ldots \Delta_\nu \leq \Delta_0 (1 - 2 c_\mu)^\nu$$

Dabei ist $\quad 0 < 1 - 2 c_\mu < 1.$

Denn c_μ ist in dem Fall, daß der ganze Bereich nur einen einzigen inneren Gitterpunkt enthält, gleich $1/4$, sonst immer noch kleiner. Also muß notwendig:

$$\lim_{\nu \to \infty} \Delta_\nu = 0$$

sein, womit die Konvergenz des Verfahrens gezeigt ist. Da wir neben dem gewöhnlichen Fall gerader Randstücke (der vorspringende Ecken in sich schließt) auch den einspringender Ecken berücksichtigen, hat der Beweis Gültigkeit für jede beliebige Form des Randes. Es wird auch bei der zweiten Randwertaufgabe nur von diesem verlangt, daß er mit der Gittereinteilung zusammenfällt und nur eine endliche Anzahl von Innenpunkten umfaßt.

14. Schließlich deuten wir noch an, wie sich die angegebene Methode auch in der **Theorie der Differentialgleichungen** selbst dazu verwenden läßt, die zweite Randwertaufgabe auf die erste zurückzuführen: Man kann in dem Fall, daß der Einheitskreis den Rand des Bereiches darstellt, die Lösung w der ersten Randwertaufgabe an jeder Stelle (r, φ) im Innern in eine trigonometrische Reihe:

$$w (r, \varphi) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} r^\sigma [a_\sigma \cos \sigma \varphi + b_\sigma \sin \sigma \varphi]$$

entwickeln, wenn nur die vorgegebenen Randwerte selbst die Darstellung:

$$w(1, \varphi) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} [a_\sigma \cos \sigma \varphi + b_\sigma \sin \sigma \varphi]$$

gestatten [1]. Nun sei an Stelle der Funktion selbst auf dem Rand ihre Ableitung nach der Normalen gegeben in Form der folgenden trigonometrischen Reihe:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \sum_{\sigma=1}^{\infty} [\alpha_\sigma \cos \sigma \varphi + \beta_\sigma \sin \sigma \varphi] \quad \ldots \ldots \quad (33).$$

Das konstante Glied α_0 muß dabei verschwinden, weil $\oint \frac{\partial w}{\partial n} d s = 0$ sein soll. Dann suchen wir diejenige Funktion:

$$w(r, \varphi) = a_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} r^\sigma [a_\sigma \cos \sigma \varphi + b_\sigma \sin \sigma \varphi] \quad \ldots \ldots \quad (34),$$

die auf dem Einheitskreis die vorgeschriebene Bedingung (33) erfüllt und im Innern der Laplaceschen Differentialgleichung genügt. Sie ist hierdurch natürlich wieder nur bis auf die Konstante a_0 bestimmt.

Zur Lösung nehmen wir an,

$$w_0(r, \varphi) = a_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} r^\sigma [a_{0\sigma} \cos \sigma \varphi + b_{0\sigma} \sin \sigma \varphi]$$

sei irgend eine beliebige harmonische Funktion mit dem Randwert:

$$w_0(1, \varphi) = a_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} [a_{0\sigma} \cos \sigma \varphi + b_{0\sigma} \sin \sigma \varphi],$$

die die Forderung (33) noch nicht erfüllt. a_0 soll dabei dieselbe Konstante bedeuten wie in (34). Dann wird auf einem Kreis im Abstand ε (sehr kleine positive Zahl) vom Rand:

$$w_0(1-\varepsilon, \varphi) = a_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} (1-\varepsilon)^\sigma [a_{0\sigma} \cos \sigma \varphi + b_{0\sigma} \sin \sigma \varphi],$$

und wir konstruieren daraus unter Zugrundelegung des in der Aufgabe geforderten Gefälles (33) die Randwerte einer neuen harmonischen Funktion:

$$w_1(r, \varphi) = a_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} r^\sigma [a_{1\sigma} \cos \sigma \varphi + b_{1\sigma} \sin \sigma \varphi],$$

indem wir setzen:

$$\begin{aligned} w_1(1, \varphi) &= w_0(1-\varepsilon, \varphi) - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial n} \\ &= a_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} (1-\varepsilon)^\sigma [a_{0\sigma} \cos \sigma \varphi + b_{0\sigma} \sin \sigma \varphi] - \varepsilon \cdot \sum_{\sigma=1}^{\infty} [\alpha_\sigma \cos \sigma \varphi - \beta_\sigma \sin \sigma \varphi] \\ &= a_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} [\{(1-\varepsilon)^\sigma a_{0\sigma} - \varepsilon \alpha_\sigma\} \cos \sigma \varphi + \{(1-\varepsilon)^\sigma b_{0\sigma} - \varepsilon \beta_\sigma\} \sin \sigma \varphi]. \end{aligned}$$

Hier wird also:

$$a_{1\sigma} = (1-\varepsilon)^\sigma a_{0\sigma} - \varepsilon \alpha_\sigma, \qquad b_{1\sigma} = (1-\varepsilon)^\sigma b_{0\sigma} - \varepsilon \beta_\sigma.$$

Auf dem Kreis mit dem Radius $1-\varepsilon$ erhält diese Funktion den Wert:

$$w_1(1-\varepsilon, \varphi) = a_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} (1-\varepsilon)^\sigma [a_{1\sigma} \cos \sigma + b_{1\sigma} \sin \sigma \varphi]$$

aus dem wir abermals unter Zugrundelegung des in (33) geforderten Gefälles die Randwerte einer neuen Funktion:

$$w_2(r, \varphi) = a_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} r^\sigma [a_{1\sigma} \cos \sigma \varphi + b_{1\sigma} \sin \sigma \varphi],$$

ableiten durch den Ansatz:

$$w_2(1, \varphi) = w_1(1-\varepsilon, \varphi) - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial n}.$$

Jetzt wird:

$$a_{2\sigma} = (1-\varepsilon)^{2\sigma} a_{0\sigma} - [1 + (1-\varepsilon)^\sigma] \cdot \varepsilon \cdot \alpha_\sigma$$

und $b_{2\sigma}$ entsprechend. Ein weiterer Schritt führt auf dieselbe Weise zu einer Funktion $w_3(r, \varphi)$, für die wird:

$$a_{3\sigma} = (1-\varepsilon)^{3\sigma} a_{0\sigma} - [1 + (1-\varepsilon)^\sigma + (1-\varepsilon)^{2\sigma}] \cdot \varepsilon \cdot \alpha_\sigma$$

[1] Encycl. d. math. Wissenschaften II. A. 7b. Nr. 20.

und $b_{3\sigma}$ entsprechend. Allgemein erhält man nach ν Schritten die Funktion:

$$w_\nu(r,\varphi) = a_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} r^\sigma \left[a_{\nu\sigma}\cos\sigma\varphi + b_{\nu\sigma}\sin\sigma\varphi\right]$$

mit den Koeffizienten:

$$a_{\nu\sigma} = (1-\varepsilon)^{\nu\sigma} a_{0\sigma} - \left[1 + (1-\varepsilon)^\sigma + (1-\varepsilon)^{2\sigma} + \ldots + (1-\varepsilon)^{(\nu-1)\sigma}\right]\varepsilon\,\alpha_\sigma,$$

$$b_{\nu\sigma} = (1-\varepsilon)^{\nu\sigma} b_{0\sigma} - \left[1 + (1-\varepsilon)^\sigma + (1-\varepsilon)^{2\sigma} + \ldots + (1-\varepsilon)^{(\nu-1)\sigma}\right]\varepsilon\,\beta_\sigma.$$

Eine unbegrenzte Wiederholung dieses Verfahrens muß bei festgehaltenem ε zu einer harmonischen Funktion führen, die auf jedem Radiusvektor zwischen dem Rand und dem Kreis $r = 1 - \varepsilon$ sicher mindestens einmal das vorgeschriebene Gefälle $\frac{\partial w}{\partial r}$ annimmt. Wir setzen:

$$\lim_{\nu\to\infty} w_\nu(r,\varphi) = w_\varepsilon(r,\varphi).$$

Geht man darnach auch zur Grenze für $\varepsilon \to 0$ über, so wird diese Funktion übergeführt in eine solche, die längs des Randes in der Normalenrichtung die Ableitung $\frac{\partial w}{\partial n}$ besitzt. Es wird also:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} w_\varepsilon(r,\varphi) = w(r,\varphi),$$

das heißt gleich der Funktion (34), die gesucht war. Beide Grenzwerte existieren und lassen sich leicht berechnen. Zunächst wird bei festem ε für die Funktion $w_\varepsilon(r,\varphi)$:

$$a_{\varepsilon\sigma} = \lim_{\nu\to\infty} a_{\nu\sigma} = -\frac{1}{1-(1-\varepsilon)^\sigma}\cdot\varepsilon\,\alpha_\sigma,$$

$b_{\varepsilon\sigma}$ entsprechend. Hieraus ergeben sich dann weiter für die gesuchte Funktion $w(r,\varphi)$ die Koeffizienten:

$$a_\sigma = \lim_{\varepsilon\to 0} a_{\varepsilon\sigma} = -\frac{\alpha_\sigma}{\sigma}, \qquad b_\sigma = \lim_{\varepsilon\to 0} b_{\varepsilon\sigma} = -\frac{\beta_\sigma}{\sigma},$$

so daß wir als Lösung der oben gestellten zweiten Randwertaufgabe erhalten:

$$w(r,\varphi) = a_0 - \sum_{\sigma=1}^{\infty} r^\sigma \left[\frac{\alpha_\sigma}{\sigma}\cos\sigma\varphi + \frac{\beta_\sigma}{\sigma}\sin\sigma\varphi\right].$$

Die Richtigkeit dieses Ergebnisses prüft man leicht durch Differenzen.

III. Biharmonische Funktionen:

15. Problemstellung. In den Versuchen[1]) die partiellle Differentialgleichung:

$$\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x,y)$$

bei vorgegebenen Randbedingungen zu integrieren, bedeutete ihre zuerst von Hrn. H. Marcus[2]) vorgenommene Zerspaltung in die beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\Delta u = v \quad\text{und}\quad \Delta v = f(x,y)$$

einen ganz wesentlichen Fortschritt. Denn nun konnte er, um für die Technik brauchbare zahlenmäßige Ergebnisse zu erlangen, diese beiden Differentialgleichungen in Annäherung durch Differenzengleichungen zweiter Ordnung ersetzen, und deren Lösung bereitet ja heute keine unüberwindlichen Schwierigkeiten mehr. Hr. Marcus selbst setzte dabei noch in einfachen Fällen die Systeme gemeiner linearer Bestimmungsgleichungen an und löste sie streng nach den gesuchten Unbekannten auf. Dagegen bediente Hr. H. Hencky[3]) sich später zu deren Bestimmung des Liebmannschen Mittlungsverfahrens und konnte so auch bei feinerer Gittereinteilung die angenäherte Integration einiger Probleme vierter Ordnung leisten. In allen Fällen waren aber die Werte der beiden Funktionen u und v auf dem Rand vorgegeben.

---

[1]) L. Föppl. Neuere Fortschritte in der technischen Elastizitätstheorie. Ztschr. f. angewandte Math. u. Mech. 1. 466. 1921.

[2]) H. Marcus. Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung elastischer Platten. Armierter Beton. 12. 107. 1919.

[3]) H. Hencky. Die numerische Bearbeitung von partiellen Differentialgleichungen in der Technik. Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. 2. 58. 1922.

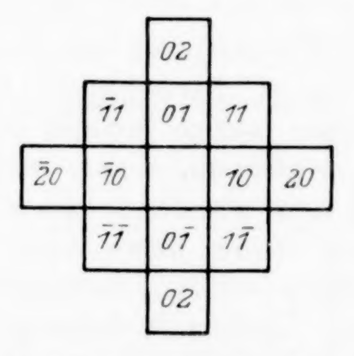
Allgemeiner ist demgegenüber die Aufgabe, auf die Hr. L. F. Richardson[1]) anläßlich seiner Untersuchungen über die Spannungsverhältnisse an Staudämmen stößt. Bei ihm sind nämlich keine v-Randwerte mehr gegeben, sondern ausschließlich solche der Funktion u. Jetzt scheint es zunächst unmöglich, mittels der Hilfsfunktion v auf die gesuchte Lösung u zu kommen. Offenbar kann man nur mit der Gleichung vierter Ordnung selbst etwas anfangen. Die Differentialgleichung hat bei Hrn. Richardson zunächst die homogene Form:

$$\Delta \Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (35),$$

u ist hier also biharmonische Funktion. Nur mit dieser Gleichung werden wir uns im folgenden beschäftigen, die allgemeine bietet dann in den einfachen Fällen der Praxis, wo man mit endlichen Differenzen rechnet, auch keine besonderen Schwierigkeiten mehr. Die strenge Integration der Gl. (35) wird dadurch eindeutig bestimmt, das man auf dem Rand des Bereichs die Funktion u selbst und ihre partielle Ableitung nach der Normalen, $\frac{\partial u}{\partial n}$, vorschreibt[2]). Rechnet man aber, um zu zahlenmäßigen Ergebnissen zu gelangen, mit der (35) entsprechenden Differenzengleichung:

$$\left.\begin{aligned} 20\,u(00) - 8\,[u(10) + u(01) + u(\bar{1}0) + u(0\bar{1})] + 2\,[u(11) + u(\bar{1}1) + u(\bar{1}\bar{1}) \\ + u(1\bar{1})] + u(20) + u(02) + u(\bar{2}0) + u(0\bar{2}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (36),$$

so hat man diese Bedingungen dadurch zu ersetzen, daß man längs des Randes die Funktionswerte auf zwei benachbarten Reihen von Gitterpunkten vorgibt. Wir haben hier also die in den Bereich einzutragende Gittereinteilung mit der Maschenweite Eins nicht nur wie früher mit dem Rand selbst zur Deckung zu bringen, sondern über ihn hinaus fortzusetzen, sodaß noch eine weitere Reihe von Gitterpunkten entsteht. Diese braucht freilich nur soweit vervollständigt zu werden, daß jeder Innenpunkt (00) die in der Differenzengleichung geforderten Nachbarpunkte:



erhält und nur in diesen müssen die Funktionswerte vorgegeben sein.

16. Das Näherungsverfahren für die biharmonische Gleichung. Man hätte nun für jeden Innenpunkt die (36) entsprechende Differenzengleichung anzusetzen und erhielte so ein System von ebensovielen linearen Gleichungen, als innere Gitterpunkte vorhanden sind, das nach den Unbekannten u aufgelöst werden müßte. Diese Arbeit ist jedoch bei größeren Bereichen noch viel schwieriger als die Auflösung des entsprechenden Systems für $\Delta w = 0$. Man könnte daher versuchen, ein der sukzessiven Mittlung harmonischer Funktionen vollkommen nachgebildetes Verfahren mittels der Gl. (36) durchzuführen, indem man mit ihrer Hilfe allmählich irgendwelche vorgegebenen Rohwerte so lange verbessert, bis die Gleichung an jeder Stelle des ganzen Bereichs von den Funktionswerten wirklich erfüllt wird. In Herrn Richardsons Arbeit findet sich keine bestimmte Angabe über den Weg, auf dem er zur Integration seiner Differenzengleichung gelangte. Es scheint, er habe irgendwelche Rohwerte durch Probieren so lange abgeändert, bis sie sämtliche jeweils die für sie angesetzte Gl. (36) erfüllten, also im wesentlichen ein derartiges Mittlungsverfahren durchgeführt. Jedoch auch diese Methode muß sich rechnerisch außerordentlich mühsam gestalten. Zudem bereitete der Beweis für die Konvergenz der Näherungen gegen die gesuchten Werte ebenso große

[1]) L. F. Richardson. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. Phil. trans. A. 210. 307. 1911.

[2]) Encyclop. d. math. Wissenschaften. II. A. 7c. Nr. 15.

Schwierigkeiten als bei dem im folgendem beschriebenen, abgeänderten Verfahren, weil hier das allgemeine Bildungsgesetz für die nach Gl. (36) gebildeten Sterne der Werte $u_\nu\,(00)$ sehr kompliziert ist.

Bedeutend bequemer gelangen wir zum Ziel, wenn wir, obwohl die Randwerte v fehlen, entsprechend der Aufspaltung der Gleichung $\Delta\,\Delta\,u = 0$ in die beiden Gleichungen zweiter Ordnung $\Delta\,u = v$ und $\Delta\,v = 0$ die Differenzengleichung (36) ersetzen durch die beiden Differenzengleichungen zweiter Ordnung:

$$u\,(10) + u\,(01) + u\,(\bar{1}0) + u\,(0\bar{1}) - 4\,u\,(00) = v\,(00) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

$$v\,(10) + v\,(01) + v\,(\bar{1}0) + v\,(0\bar{1}) - 4\,v\,(00) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38).$$

Ihre Gleichwertigkeit mit (36) erkennt man sofort, wenn man die nach (37) gebildeten Ausdrücke für $v\,(10)$, $v\,(01)$, $v\,(\bar{1}0)$ und $v\,(0\bar{1})$ samt $v\,(00)$ selbst in (38) einsetzt. Von den beiden neuen Gleichungen hat aber die zweite genau die Form der früheren Mittlungsgleichung (1), weshalb sich die Hilfsfunktion v nach unserem bekannten Mittlungsverfahren berechnen lassen müßte, falls man ihre Randwerte besäße. Wären uns statt auf nur zweien auf drei benachbarten Kränzen von Gitterpunkten rings um das ganze Gebiet herum u-Werte vorgegeben, so könnten wir uns aus ihnen mittels der Gl. (37) leicht auf dem mittleren der drei Kränze auch die v-Werte berechnen. Mit diesen als Randwerten ließe sich dann durch Mittlung nach Gl. (38) v auch im ganzen Innern des Bereichs gewinnen. Weiter könnte man mit dessen Hilfe u im Innern an jeder beliebigen Stelle (00) nach der aus (37) folgenden Gleichung:

$$u\,(00) = {}^1\!/_4\,[u\,(10) + u\,(01) + u\,(\bar{1}0) + u\,(0\bar{1}) - v\,(00)] \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

ausrechnen, falls die hier rechts vorkommenden u an den Nachbarstellen schon bekannt wären. Kurz, wir wären dann imstande, u auf dem angegebenen Wege zu bestimmen, wenn wir es überall schon vorher kennten. Denn zunächst dem Rande brauchen wir es schon zur Berechnung der v-Randwerte, im ganzen Innern aber müssen wir jeweils die Nachbarwerte von $u\,(00)$ haben, um dieses selbst zu bestimmen.

Ganz analog lagen aber die Verhältnisse auch schon bei der Aufgabe, w aus der Gl. (2) als harmonische Gitterfunktion zu berechnen. Denn wir hätten es dann sofort an jeder Stelle (00) hinschreiben können, wenn jeweils die vier benachbarten Werte schon bekannt gewesen wären, das heißt praktisch, wenn wir es überall schon besessen hätten. Dort halfen wir uns dadurch, daß wir zunächst an allen Innenstellen des Bereichs nur rohe Näherungswerte eintrugen und diese dann allmählich mit der Beziehung (2), die streng von den Werten erfüllt werden sollte, verbesserten. Ganz dasselbe können wir nun im vorliegenden Fall auch tun. Demnach müssen zunächst Rohwerte in das Schema der u eingetragen werden, und diese sind dann zu verbessern, indem man die oben beschriebenen Rechenoperationen auf sie anwendet, die hier freilich komplizierter aussehen als die einfache Ermittlungsgleichung (2). Die einmal verbesserten Werte unterwirft man dann wieder demselben Verfahren und so fort, bis schließlich nach einer genügenden Anzahl von Schritten die geforderten Bedingungen (37) und (38) von den gefundenen Werten praktisch streng erfüllt werden.

17. Durchführung des Verfahrens. Ein einzelner Schritt besteht dabei jeweils aus folgenden Rechenoperationen:

1. Aus den schon vorhandenen ν ten Näherungswerten u_ν auf dem ersten inneren Ring von Gitterpunkten und den für jeden Schritt ν gleichbleibenden Randwerten $u_0 = u_\nu$ berechnet man für den inneren der beiden Kränze von Randpunkten mittels der Gleichung:

$$v_\nu\,(00) = u_\nu\,(10) + u_\nu\,(01) + u_\nu\,(\bar{1}0) + u_\nu\,(0\bar{1}) - 4\,u_\nu\,(00) \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

die v-Werte, die für das folgende Mittlungsverfahren den Rand darstellen.

2. Mit diesen v Randwerten wird im ganzen Bereich v_ν berechnet durch das Mittlungsverfahren nach der Gleichung:

$$v_\nu\,(00) = {}^1\!/_4\,[v_\nu\,(10) + v_\nu\,(01) + v_\nu\,(\bar{1}0) + v_\nu\,(0\bar{1})] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41).$$

Der Index ν bezieht sich hier natürlich nicht mehr wie früher auf die fortschreitende Annäherung bei der ersten Randwertaufgabe zweiter Ordnung, sondern auf die Anzahl der Schritte unseres neuen Verfahrens.

Tafel V.

u_0

		0	0	10	20	30		
	0	0	10	20	30	40	50	
0	10	17	27	38	49	60	70	60
10	20	31	43	55	67	79	90	80
20	30	44	58	72	86	99	110	100
30	40	56	72	89	105	120	130	130
40	50	68	86	105	126	144	150	160
	60	80	100	120	150	180	170	
		70	90	120	160	190		

v_0

	27	7	8	9	10	
-3	$\bar{8}$	4	2	0	$-\bar{6}$	-20
1	2	0	$-\bar{3}$	-6	-12	-21
4	0	-3	-6	-10	$-1\bar{5}$	-21
6	-2	$-\bar{7}$	-9	-12	-15	-10
8	-7	-12	-10	-15	-23	4
	-22	-24	-5	-14	-66	

u_1

15	26	37	49	61
$3\bar{7}$	43	56	69	82
44	$5\bar{9}$	$7\bar{4}$	88	102
$5\bar{7}$	74	91	108	123
70	89	108	130	150

v_1

	25	6	7	9	11	
-5	$\bar{7}$	4	2	0	$-\bar{5}$	-19
$\bar{7}$	2	$\bar{1}$	-2	-5	-10	-18
4	1	-2	-5	-8	-12	-18
$\bar{7}$	-1	-5	-7	$-1\bar{0}$	-12	-7
10	-5	$-1\bar{0}$	-7	-11	-18	10
	-20	-21	-2	-10	-50	

u_2

15	25	37	49	61
30	43	56	70	83
44	59	75	90	104
57	75	93	110	$12\bar{5}$
70	90	109	132	150

v_2

	25	5	7	9	11	
-5	6	3	2	1	-4	-19
0	2	0	$-\bar{2}$	-4	-9	-17
4	1	-2	-4	-7	$-1\bar{1}$	-16
7	0	-4	-6	-8	-10	$-\bar{5}$
10	-5	-9	$-\bar{7}$	-10	$-1\bar{3}$	10
	-20	-20	-1	-8	-60	

u_9

15	25	$3\bar{8}$	50	62
30	43	58	72	$8\bar{5}$
$4\bar{5}$	61	78	94	106
58	78	97	115	128
71	92	112	134	152

v_9

	25	5	$\bar{8}$	10	12	
-5	$\bar{7}$	4	3	2	-3	-18
0	2	1	$-\bar{1}$	-3	-8	$-1\bar{6}$
$\bar{5}$	1	-1	-3	$-\bar{6}$	-9	-14
8	0	$-\bar{4}$	-5	-7	$-\bar{9}$	-2
11	-4	-8	-5	$-\bar{9}$	-16	12
	-19	-18	2	-6	-58	

u_{10}

		0	0	10	20	30		
	0	0	10	20	30	40	50	
0	10	15	25	$3\bar{8}$	50	62	70	60
10	20	30	43	58	72	$8\bar{5}$	90	80
20	30	$4\bar{5}$	61	78	94	106	110	100
30	40	58	78	97	115	128	130	130
40	50	71	92	112	134	152	150	160
	60	80	100	120	150	180	170	
		70	90	120	160	190		

Δ^2

8	-7	1	2	$\bar{2}$
-2	-2	$\bar{8}$	-7	4
4	-1	-4	2	-6
-5	5	2	2	$\bar{4}$
$\bar{3}$	-3	3	-6	2

η

0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{3}{8}$
$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0
$-\frac{3}{8}$	0	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0
0	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$

ζ

$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0
0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$
$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{3}{8}$	0

3. Mit Hilfe der vorhergehenden u_ν und der eben gewonnenen v_ν-Werte läßt sich an jeder Stelle des Gebietsinnern nun ein verbesserter Wert $u_{\nu+1}$ berechnen gemäß der Gleichung:

$$u_{\nu+1}(00) = {}^1/_4\,[u_\nu(10) + u_\nu(01) + u_\nu(\bar{1}0) + u_\nu(0\bar{1}) - v_\nu(00)] \quad . \quad . \quad (42).$$

Während hierbei 2. einen erheblicheren Arbeitsaufwand erfordert, weil v zunächst durch allmähliche Approximation gewonnen werden muß, erledigen sich 1. und 3. sehr rasch, da man an jeder Stelle nur einmal den in Gl. (40) bzw. (42) geforderten Wert aus gegebenen Zahlen auszurechnen braucht.

Die Taf. V enthält ein einfaches, auf diese Weise gerechnetes Beispiel, dessen Werte nach zehn Schritten die vorgeschriebenen Bedingungen erfüllen. Die ersten Schritte und der letzte sind selbst einzeln aufgeführt. Auch bei diesem Verfahren kann man sich eine Reihe ähnlicher Rechenvorteile wie bei der Behandlung der Aufgaben zweiter Ordnung zu nutze machen. Zunächst braucht man auch hier sehr bald nur noch die letzten Stellen der Zahlen wirklich auszurechnen, weil die vorderen sich nicht mehr ändern. Die Randwerte für die v-Schemata erhält man vom Schritt $\nu = 1$ ab jeweils sehr leicht dadurch, daß man diejenigen des vorigen Schrittes einfach um ebensoviel abändert, als die u-Werte des ersten Innenrings sich inzwischen änderten. Denn die außerdem in Gl. (40) auftretenden Randwerte u bleiben ja stets dieselben. Eine große Annehmlichkeit für die Rechnung bildet ferner ähnlich wie bei der zweiten Randwertaufgabe des Problems zweiter Ordnung der Umstand, daß alle v-Schemata sich überhaupt nur sehr wenig von einander unterscheiden. Hat man erst das für $\nu = 0$ berechnet, so kann man stets aus dem vorigen leicht gute Rohwerte für das folgende ableiten, so daß die Mittlung dann jedesmal sehr rasch zu konstanten v-Werten führt. Gelegentliche Rechenfehler machen natürlich auch bei diesem Verfahren die vorangegangene Arbeit nicht zwecklos, sondern verzögern nur unter Umständen die Konvergenz gegen die gesuchten Werte.

Die Anzahl der notwendigen Schritte bis zum Stillstand des Werteschemas hängt wieder wesentlich von der Güte der ursprünglich gewählten Rohwerte ab. Nach Gl. (36) soll schließlich jeder Wert die Beziehung erfüllen:

$$u(00) = {}^8/_{20}\,[u(10) + u(01) + u(\bar{1}0) + u(0\bar{1})] - {}^2/_{20}\,[u(11) + u(\bar{1}1) + u(\bar{1}\bar{1}) + u(1\bar{1})]$$
$$- {}^1/_{20}\,[u(20) + u(02) + u(\bar{2}0) + u(0\bar{2})].$$

Wären hierbei jeweils die Summen in den Klammern [ ] einander gleich, so hätten wir:

$$u(00) = {}^1/_4\,[u(10) + u(01) + u(\bar{1}0) + u(0\bar{1})] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43).$$

Man kann sich demnach u-Rohwerte dadurch verschaffen, daß man mit den auf dem inneren der beiden Randkränze liegenden Zahlen als Randwerten zunächst im Innern diejenige Funktion u, die der Gl. (43) genügt, durch einfache Mittlung berechnet. Falls einander benachbarte u auf dem Doppelrand nicht gar zu ungewöhnliche Verschiedenheiten von einander aufweisen, so sind dann diese Rohwerte auch nicht mehr allzu fern von den gesuchten Funktionswerten der Differenzengleichung vierter Ordnung selbst. Auf diese Weise sind bei dem Beispiel der Taf. V die Rohwerte u_0 gewonnen, und sie erweisen sich tatsächlich als gut, da das Verfahren bereits nach einer verhältnismäßig kleinen Anzahl von Schritten zum Ziele führt.

18. Die Aufrundungsfehler. Zur Kontrolle der endgültigen Werte ist zum Schluß noch für jede Stelle des Bereichs die Differenz Δ^2 berechnet, um die die linke Seite der Gl. (36) von Null abweicht, wenn man die gewonnenen Zahlen in sie einsetzt (Taf. V). Indessen gestatten diese Δ^2 nicht ohne weiteres einen Schluß auf die Genauigkeit der hergeleiteten Funktionswerte, da wir auf anderem Wege zu ihnen gelangt sind. Besser ziehen wir auch für die Untersuchung der Aufrundungsfehler die Gleichungen (40), (41) und (42) heran, da diese tatsächlich zur Berechnung der u benutzt wurden. Die Funktionswerte eines fertig berechneten u-Schemas weichen von den wahren Lösungen der Differenzengleichungen ab einmal, weil an den meisten Stellen des u-Bereichs Aufrundungen stattfinden, dann aber auch, weil nach Gl. (42) jeder u-Wert ein v enthält, das nach **8.** selbst durch einen Aufrundungsfehler gefälscht ist. Die Ursache dieser Aufrundungsfehler, die Aufrundungen selbst im fertigen v-Schema, nennen wir wieder $\eta(xy)$. Im u-Schema dagegen sollen die Aufrundungen $\zeta(xy)$ heißen. Die dadurch bedingten Aufrundungsfehler seien im Schema der v wie früher $\varepsilon(xy)$, im Schema

der u aber $\delta(xy)$. Ihr Zusammenhang mit den gefundenen Funktionswerten u und v und den wahren Werten U und V wird gegeben durch die Gleichungen:

$$u(xy) = U(xy) + \delta(xy), \qquad v(xy) = V(xy) + \varepsilon(xy).$$

Nach diesen Ueberlegungen kann die Gl. (42) von den fertig gerechneten Funktionswerten nicht streng erfüllt werden, sondern muß vielmehr richtig lauten:

$$u(00) = {}^1/_4\,[u(10) + u(01) + u(\bar{1}0) + u(0\bar{1}) - v(00)] + \zeta(00),$$

oder statt dessen:

$$U(00) + \delta(00) = {}^1/_4\,[U(10) + U(01) + U(\bar{1}0) + U(0\bar{1})$$
$$- V(00) + \delta(10) + \delta(01) + \delta(\bar{1}0) + \delta(0\bar{1}) - \varepsilon(00)] + \zeta(00).$$

Da aber die wahren Werte streng die Beziehung erfüllen:

$$U(00) = {}^1/_4\,[U(10) + U(01) + U(\bar{1}0) + U(0\bar{1}) - V(00)],$$

so folgt durch Subtraktion die Gleichung:

$$\delta(00) = {}^1/_4\,[\delta(10) + \delta(01) + \delta(\bar{1}0) + \delta(0\bar{1})] + [\zeta(00) - {}^1/_4\,\varepsilon(00)] \quad . \quad (44),$$

die wieder für jeden Innenpunkt des ganzen Bereichs anzusetzen ist. Das entstehende System löst man streng oder durch ein mit Gl. (44) durchgeführtes Mittlungsverfahren nach den gesuchten δ auf. Für ζ hat man dabei an jeder Stelle die im fertigen u Schema beim Ausrechnen der Gl. (42) stattfindende Aufrundung einzusetzen. Die ε dagegen müssen gesondert erst nach den Vorschriften von **8.** mittels Gl. (13) aus den Aufrundungen η des fertig berechneten v-Schemas hergeleitet werden[1]). Diese Aufgabe läßt sich allerdings unmittelbar nur in erster Annäherung lösen, und so werden auch die auf diesem Wege gewonnenen δ nur Näherungswerte. Wir konnten nämlich in **8.** zur Berechnung der ε den konstanten Randwert Null voraussetzen, hier dagegen sind die ε auf dem Rande sicher von Null verschieden. Denn die aus den u nach (40) berechneten v Randwerte sind nicht fehlerfrei, da in dieser Gleichung stets ein durch Aufrundungsfehler gefälschter u-Wert des ersten Innenrings mit verwendet wird.

Die richtigen Randwerte für die ε würde man nach Gl. (40) erhalten, wenn man den Fehler δ eines jeden u-Wertes auf dem ersten Innenring einfach auf die nächstbenachbarte Randstelle rückte, wie dies mit jedem solchen Wert u selbst geschieht. Eine neue Aufrundung findet dabei durch die Gl. (40) nicht statt. Die δ sind aber selbst gesucht. Deshalb bleibt nichts übrig, als sich aus Randwerten Null, oder auch aus andern nach Gl. (13) nur Näherungswerte für die ε im Innern und damit nach Gl. (44) erst auch angenäherte δ zu verschaffen. Mit diesen läßt sich dann ein verbesserter Rand für die ε und dadurch eine Verbesserung der ε-Innenwerte erzielen. Damit gelangt man wieder zu besseren Werten δ usf. Man sieht, wir kommen hier zu einem der Berechnung der Funktionswerte u nach **17.** vollkommen analogen Näherungsverfahren, das erst dann beendet ist, wenn die Werte δ sich bei einem weiteren Schritt der Rechnung nicht mehr ändern. Anstelle der Gl. (40) tritt hier die einfache Regel, daß an jeden Punkt des ε-Randes der δ-Wert des vorigen Schrittes zu treten hat, der diesem Punkt auf dem ersten Innenring am nächsten steht. Gl. (41) wird ersetzt durch die Vorschriften von **8.**, die nun nur mit dem eben beschriebenen, statt mit den konstanten Randwerten Null durchzuführen sind. Endlich Gl. (42) geht über in Gl. (44), in der für die ε die vorher gefundenen Werte und für die ζ die Aufrundungen an jeder Stelle des fertigen u-Schemas einzusetzen sind. Da die gesuchten Fehler infolge der Aufrundungen selbst wieder falsch werden, muß man, um sie genügend genau zu erhalten, eine hinreichende Anzahl von Stellen bei ihrer Berechnung mitnehmen.

Handelt es sich nur darum, ein angenähertes Bild von der Größe der möglichen Aufrundungsfehler δ zu erhalten, so kann man schließlich auch für die ε den Randwert Null voraussetzen und so durch einen einzigen Schritt des Verfahrens zum Ziel gelangen. Die Fehlerhaftigkeit der ε fällt dabei wenig ins Gewicht, da jedes ε ja nur mit dem Fehler $^1/_4$ in der Gl. (44) auftritt. Unter Annahme der größtmöglichen Aufrundung von $^5/_8$ an jeder Stelle gelangt man so ziemlich rasch zu etwas zu kleinen Maximalfehlern δ. Die ε müssen natürlich zur Berechnung des schlimmsten Falles mit dem Pluszeichen in die Gl. (44) eingesetzt werden. Beispielsweise finden sich so für ein

[1]) In Taf. V sind die Aufrundungen ζ und η für unser Beispiel besonders aufgeführt.

Quadrat mit $n=3$ inneren Gitterpunkten längs einer Seite mit derselben Koordinatenbezeichnung wie bei den Beispielen von **8.** in Einheiten der letzten Stelle die Werte:

$$\delta(11) = 1{,}852, \qquad \delta(12) = 2{,}438, \qquad \delta(22) = 3{,}235.$$

Auch angenäherte obere Schranken für die Maximalfehler lassen sich nach denselben Ueberlegungen wie in **8.** leicht berechnen. So erhält man für die Quadrate $n=3$ bzw. $n=5$ die Werte:

$$\delta_1 = 4{,}313 \quad \text{bzw.} \quad \delta_1 = 13{,}406,$$
$$\delta_2 = 5{,}250 \qquad\qquad \delta_2 = 21{,}938,$$
$$\delta_3 = 23{,}719.$$

Daß alle diese Zahlen wesentlich größer sind als die entsprechenden, die wir früher für die ε fanden, leuchtet ein, da jetzt fünf statt vier fehlerhafter Funktionswerte ihre Entstehung verursachen.

19. Zur Untersuchung der Konvergenz unseres Annäherungsverfahrens gegen die gesuchten Werte U hätte man zweckmäßig auch jetzt — ohne Rücksicht auf die numerischen Aufrundungsfehler δ — wieder die Differenz zwischen diesen wahren Lösungen und den bei den einzelnen Schritten des Verfahrens berechneten Näherungswerten zu betrachten. Da diese letzteren gegen die wahren Werte streben sollen, so muß die Differenz beider Größen bei fortgesetzer Wiederholung der Methode sich unbegrenzt der Null nähern. An sämtlichen Stellen des Doppelrandes ist sie von vornherein gleich Null, da wir auch bei den einzelnen Schritten der Annäherung stets die richtigen, gegebenen Randwerte benutzen. Demnach wäre nur der Nachweis erforderlich, daß in einem Schema mit lauter Randwerten Null durch das Verfahren auch beliebige endliche Innenwerte u, das heißt für eine allgemeine Aufgabe beliebige Abweichungen der ersten Rohwerte von den gesuchten Lösungen, mit unbegrenzt wachsender Anzahl ν der Schritte kleiner und kleiner gemacht werden, um schließlich ganz zu verschwinden. Denn man kann sich immer bei einer beliebigen Aufgabe die Näherungswerte zusammengesetzt denken aus den wahren Werten und den eben eingeführten Differenzen. Dann ändert die Anwendung der Verbesserungsgleichungen (40), (41) und (42) auf die wahren Werte nichts an diesen, da sie ja die geforderten Bedingungen streng erfüllen. Man braucht also nur ihre Einwirkung auf die Differenzen zu untersuchen.

Bei dieser speziellen Fassung der Aufgabe mit den konstanten Randwerten $u=0$ wird die Herleitung der Randwerte für die einzelnen v-Schemata besonders einfach. Denn da jetzt in Gl. (40) auf der rechten Seite immer nur diejenigen u-Werte allein von Null verschieden sind, die dem ins Auge gefaßten Randpunkt auf dem ersten Innenring am nächsten stehen, so braucht man nur diese jeweils auf die benachbarten Randstellen hinauszurücken, um die fertigen v-Randwerte zu erhalten. Jeder v-Rand besteht also einfach aus u-Werten, die beim vorigen Schritt auf dem ersten Innenring standen.

Leider stellen sich der wirklichen Durchführung des Konvergenzbeweises nach verschiedensten Methoden bis jetzt unüberwindbare Schwierigkeiten entgegen. Versucht man zunächst beispielsweise wie bei dem einfachen ersten Liebmannschen Beweis für Quadrate bei der ersten Randwertaufgabe zweiter Ordnung[1]), auch hier zu zeigen, daß der größtmögliche Betrag eines u-Wertes nach jedem Schritt kleiner werden muß, so findet sich, daß dies nicht notwendig ist. Es lassen sich leicht Gegenbeispiele konstruieren, die ein Anwachsen von u-Werten im Innern nach Durchführung eines Näherungsschrittes ergeben. Ganz das gleiche zeigt sich bei dem Versuch, zu beweisen, daß im ganzen Bereich mit Einschluß der Randwerte überall der Betrag der Differenz zwischen je zwei benachbarten u-Werten mit jedem Schritt kleiner wird. Aber auch der tiefergehende analytische Ansatz führt nicht zum Ziel, wenn wir wie bei der ersten Randwertaufgabe zweiter Ordnung den ν-ten Näherungswert an einer beliebigen Stelle 0,0, also $u_\nu(00)$, ausdrücken durch die ursprünglichen Rohwerte u_0 und zudem durch die zugehörigen Werte der Hilfsfunktion v. Nach ganz entsprechenden Ueberlegungen wie im Abschnitt **2.** u. f. gelangt man zu dem Ergebnis, daß auch $u_\nu(00)$ sich aus den u_0 wie früher $w_\nu(00)$ aus den w_0 bei jedem einzelnen Schritt ν zusammensetzt nach der Vorschrift der damals eingeführten Gewichtssterne S_ν. Dazu treten aber noch Werte der Hilfsfunktion v von allen vorhergehenden Schritten $\nu-1$ bis 0, ebenfalls angeordnet nach der Vorschrift gewisser Gewichtssterne. Wenn wir unter $S_\nu(v_\lambda)$ diejenige lineare Funktion der um den

[1]) H. Liebmann l. c.

Punkt (00) als Mittelpunkt liegenden Funktionswerte v_λ verstehen, in der jedes v_λ mit dem im Stern S_ν an seiner Stelle stehenden Gewicht multipliziert wird, so können wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} u_\nu(00) &= \frac{1}{4^\nu} S_\nu(u_0) - \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4^{\nu-1}} S_{\nu-1}(v_0) + \frac{1}{4^{\nu-2}} S_{\nu-2}(v_1) + \ldots + \frac{1}{4} S_1(v_{\nu-2}) + S_0(v_{\nu-1})\right\} \\ &= \frac{1}{4^\nu} S_\nu(u_0) - \frac{1}{4}\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \frac{1}{4^{\nu-\lambda-1}} S_{\nu-\lambda-1}(v_\lambda) \end{aligned}\right\} \quad (45).$$

Wie man aus dieser Darstellung zunächst sieht, kann wie bei dem Verfahren für die erste Randwertaufgabe zweiter Ordnung auch hier leicht der Fall eintreten, daß bei allgemeinen Aufgaben oft die ersten Näherungswerte an einer Stelle noch falscher werden als der ursprünglich angesetzte Rohwert. Zudem setzen sich auch jetzt wieder die u_ν, wenn man von den v absieht, abwechslungsweise nur aus den u_0 von je einer der beiden in **3.** eingeführten Scharen von Rohwerten zusammen. Deshalb kann man auch bei diesem Verfahren oft einem oszillierenden Verlauf der Näherungswerte begegnen. In unserm Beispiel, Taf. V, treten beide Erscheinungen allerdings nirgens charakteristisch hervor, da die Rohwerte alle ziemlich gleichmäßig gut gewählt waren. Immerhin muß man auf diese Möglichkeiten Rücksicht nehmen, wenn man während der Durchführung einer Aufgabe aus dem Verlauf der schon gewonnenen Näherungswerte die gesuchten Lösungen extrapolieren will.

Die Darstellung (45) gilt zunächst nur für eine Stelle (00), die soweit vom Rand entfernt ist, daß lauter Normalsterne entstehen. Nach einer gewissen Anzahl von Schritten wird aber der Rand von den größten Sternen erreicht, und von da ab haben an die Stelle der normalen mehr und mehr umrandete Sterne zu treten. Besonders die u Werte des ersten Innenrings setzen sich abgesehen von den v alsbald aus den u_0 zusammen nach Sternen, die einseitig stark beschnitten sind. Da aber die v-Randwerte nach oben aus den u des ersten Innenrings entstehn, so erkennt man, daß auch sämtliche v im Innern des Bereichs, die durch Mittlung aus den Randwerten nach Gl. (41) berechnet werden, Funktionen der u_0 sind. Könnten wir also die gemittelten v leicht durch ihre Randwerte analytisch ausdrücken, so ließe sich die obige Gl. (45) noch umformen in eine solche, in der rechts überhaupt nun noch u_0 stehen, so daß also $u_\nu(00)$ nur durch die ursprünglichen Rohwerte ausgedrückt würde. Dies ist freilich, da es sich um die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen handeln würde, allgemein nicht explizit durchführbar. Aber man erkennt wenigstens, wie eng die Näherungswerte u_ν mit den Rohwerten u_0 des Innern und alsbald wegen der v auch mit denen in der Nachbarschaft des ganzen Randes durch das Approxinationsverfahren verknüpft werden.

Für den Betrag unserer ν-ten Näherungswerte folgt aus Gl. (45):

$$\left.\begin{aligned} |u_\nu(00)| &\leq \frac{1}{4^\nu}|S_\nu(u_0)| + \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4^{\nu-1}}|S_{\nu-1}(v_0)| + \frac{1}{4^{\nu-2}}|S_{\nu-2}(v_1)| + \ldots \frac{1}{4}|S_1(v_{\nu-2})| + |S_0(v_{\nu-1})|\right\} \\ &\leq \frac{1}{4^\nu}|S_\nu(u_0)| + \frac{1}{4}\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \frac{1}{4^{\nu-\lambda-1}}|S_{\nu-\lambda-1}(v_\lambda)| \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

also ein Ausdruck von positiven, meist umständlich gebauten Gliedern, deren Anzahl $\nu + 1$ mit jedem weiteren Schritt des Verfahrens wächst. Wenn man in ihm wie früher bei dem Mittlungsverfahren (vergl. **6**) für alle p oder q Gewichtszahlen eines umrandeten Sternes jeweils die größte des entsprechenden Normalsterns und außerdem für die Rohwerte u_0 jeweils deren größtmöglichen Betrag M einsetzt, so erhält man einen Ausdruck der trotz des Nenners mit unbegrenzt wachsendem ν wegen der immer größer werdenden Gliederzahl selbst unendlich groß wird. Dabei müssen sämtliche v_λ in (46) ersetzt werden durch obere Schranken aus den u_0. Denn sie hängen ja durch Mittlung zunächst mit ihren Randwerten und diese wieder mit den u_λ des ersten Innenrings zusammen. Die u_λ des ersten Innenrings beruhen aber selbst, abgesehen von den v-Werten, die abermals so zu behandeln sind, auf den u_0 nach Maßgabe von Sternen, die je nach der Gestalt des Bereichs und der Schrittzahl teilweise oder ganz umrandet sind. Die Divergenz der rechten Seite wird auch dadurch nicht behoben, daß man statt der genannten größten Gewichtszahlen der Normalsterne die an jeder Stelle wirklich geltenden Gewichte der umrandeten Sterne, die ja viel kleiner sind, in die Rechnung einführt.

Das Mißlingen dieses Beweisversuchs hat seinen Grund darin, daß sämtliche v-Werte bei der Abschätzung statt mit den Minuszeichen der Formel (45) mit den Pluszeichen versehen werden müssen, während man die dadurch bedingte, bestimmte Festlegung der

Vorzeichen an anderer Stelle, wo sie die Konvergenz tatsächlich bewirken, wiederum nicht berücksichtigen kann. Um zum Ziel zu gelangen, hätte man statt der Beträge die einzelnen Glieder in (46) algebraisch zu betrachten und käme so vermutlich zu einen Ausdruck für u_λ (00), der anfänglich zwar in Uebereinstimmung mit unseren obigen Feststellungen tatsächlich wachsen könnte, der für unbegrenzt großes ν aber doch wohl schließlich verschwinden müßte. Jedenfalls kommt man mit ganz rohen, allgemeinen Annahmen über die u_0 ähnlich denen wie bei der Gleichung zweiter Ordnung hier nicht durch. Vielmehr müßte man wegen des durch die v von vornherein bedingten engen Zusammenhangs der Näherungswerte u_λ auch mit entfernt liegenden u_0 gleichzeitig die Verhältnisse im ganzen Bereich in der Rechnung berücksichtigen, um das Verschwinden der u_λ fesstellen zu können. Dadurch bieten sich der Durchführung des Konvergenzbeweises einerseits erhebliche rechnerische Schwierigkeiten. Dann aber — und dies ist das Schlimmere — verliert jede der bisher angewandten Methoden durch irgend welche bestimmten Festsetzungen über die u_0, wie sie hier unumgänglich nötig sind, sofort ihre Allgemeinheit und damit den Charakter eines Beweises überhaupt. Statt dessen gerät man durch jede bestimmte Annahme sofort auf die Verfolgung irgend eines Spezialfalles, und auch dieser läßt sich bei bestimmt gegebenen Daten wegen des komplizierten Aufbaues der Näherungswerte (45) nicht allgemein behandeln, sondern man kann nur Schritt für Schritt das Verfahren nach (45) durchrechnen und zusehen, ob die u_ν (00) sich tatsächlich dabei mehr und mehr der Null nähern, wie dies für die Konvergenz nötig ist. Ein strenger Beweis für unser in praktischen Fällen durchaus bequem zu handhabendes Verfahren scheint demnach — wenigstens nach üblichen Methoden — zunächst kaum möglich, obwohl selbst in nichtquadratischen Bereichen an der Konvergenz gar nicht zu zweifeln ist. Wir müssen uns vielmehr einstweilen nur mit der Feststellung begnügen, daß von den vielen Beispielen, die gerechnet wurden, in der Tat jedes gegen die Lösung der Aufgabe konvergierte. 504

Über die zufällige zyklische Anordnung paarweise gleicher Elemente.

Von EUGEN SLUTSKY in Kiew.

In der Biologie tritt — im Rahmen der Mendelschen Vererbungstheorie — das folgende wahrscheinlichkeitstheoretische Problem[1]) auf: $2s$ paarweise gleiche Elemente sind über die Punkte einer geschlossenen Linie verstreut. Jede Reihenfolge oder Anordnung sei gleich wahrscheinlich. Gefragt wird, wie groß die Wahrscheinlichkeit $P_{m/s}$ dafür ist, daß von den s Paaren m vereinigt und $s-m$ nicht vereinigt liegen. Im ersten Abschnitt der vorliegenden Arbeit wird die Lösung dieses Problems gegeben; im zweiten behandeln wir den Fall, daß zwei von den Paaren ununterscheidbar sind. Schließlich berichtet der dritte Teil über eine umfangreiche Versuchsreihe, durch die Ergebnisse und Voraussetzungen der Rechnung überprüft werden.

1. Ableitung der Lösung. Bezeichnet man die Zahl aller möglichen zyklischen Anordnungen von $2s$ Elementen mit N_s und die Zahl der Anordnungen mit m vereinigten Paaren mit $N_{m/s}$, so hat man für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P_{m/s} = \frac{N_{m/s}}{N_s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

[1]) Diese Studie wurde durch den Wunsch eines Freundes von mir, Hrn. M. W. Tschernojarow, veranlaßt, der ein Kriterium haben wollte, um prüfen zu können, ob das Zusammentreffen der gleichartigen Chromosomen zufällig oder nicht zufällig vorkomme. Diese Aufgabe wurde, so viel ich weiß, zuerst von Prof. S. Nawaschin gestellt. (»Ueber Kerndimorphismus in somatischen Zellen bei Galtonia Caudicans« — [russisch] Bull de l'Acad. Imperial des sciences de St. Petersburg, 1912, VI. Serie, Nr. 4, S. 373). Sein Lösungsversuch kann aber m. E. in keiner Weise als definitiv gelten. Erstens hat Prof. S. Nawaschin keine theoretische Lösung seiner Aufgabe gefunden und mußte daher die nötigen Wahrscheinlichkeitswerte aus einer Versuchsreihe bestimmen, die aber wegen ungenügender Zahl der Versuche keinen genügenden Grad der Genauigkeit haben konnte; zweitens war auch die Zahl der untersuchten Präparate zu klein usw. Hier sollen lediglich die (wahrscheinlichkeitstheoretischen) Grundlagen der Aufgabe, die vielleicht nicht nur für Biologen von einigem Interesse sein können, zur Darstellung gebracht werden.

Die Zahl der Permutationen von $2s$ Elementen ist bekanntlich $(2s)!$ und es ist daher leicht einzusehen, daß die Zahl der zyklischen Anordnungen

$$N_s = (2s-1)! \quad \dots \dots \dots \dots \quad (2)$$

ist. Denn aus jeder der N_s zyklischen Anordnungen gehen genau $2s$ lineare Aufstellungen hervor, indem man bei irgend einem der Elemente die Zählung beginnt. Die Zahl $N_{m/s}$ ergibt sich aus den folgenden Betrachtungen. Man bezeichne mit $N_{m/s}'$ die Zahl der Anordnungen mit m vereinigten Paaren unter der Bedingung, daß unter ihnen ein bestimmtes, z. B. $a_1 a_2$ (das von $a_2 a_1$ zu unterscheiden ist) sich vorfindet. Macht man ein Verzeichnis aller Anordnungen mit m vereinigten Paaren, unter denen sich $a_1 a_2$, befindet, dann ein solches der Anordnungen mit dem Paar $a_2 a_1$, dann weiter ein Verzeichnis mit $b_1 b_2$ usw., so wird die Zahl aller Anordnungen in allen $2s$ Verzeichnissen $2s\, N_{m/s}'$ sein. Es ist aber nicht schwer einzusehen, daß jede Reihenfolge sich hier m-mal wiederholt, da sie einmal in jedem der m Verzeichnisse, die m entsprechenden Paaren zugeordnet sind, sich vorfindet. Daher hat man die Beziehung

$$N_{m/s} = \frac{2s}{m} N_{m/s}' \quad \dots \dots \dots \dots \quad (3).$$

Da weiter eine Anordnung von $2s$ Elementen mit m vereinigten Paaren (bei $s > 2$) entweder aus einer Anordnung von $2s-2$ Elementen mit $m-1$ Paaren durch Einfügung des letzten Paares, es sei $a_i a_j$ (d. i. entweder $a_1 a_2$ oder $a_2 a_1$), zwischen beliebige verschiedene Elemente — und zwar auf $(2s-2)-(m-1) = 2s-m+1$ verschiedene Weisen — oder aus einer Anordnung von $2s-2$ Elementen mit m Paaren durch Einfügung von $a_i a_j$ zwischen gleiche Elemente — und zwar auf m verschiedene Weisen — entstehen kann, so findet man, daß

$$N_{m/s}' = (2s-m+1)\; N_{m-1/s-1} + m\, N_{m/s-1} \quad \dots \dots \quad (4).$$

Substituiert man diesen Ausdruck in (3) und berücksichtigt man, daß den Formeln (1) und (2) zufolge $N_{m/s} = (2s-1)!\, P_{m/s}$, $N_{m-1/s-1} = (2s-3)!\; P_{m-1/s-1}$ und $N_{m/s-1} = (2s-3)!\; P_{m/s-1}$, so findet man schließlich

$$P_{m/s} = \frac{2s}{m(2s-1)(2s-2)} \left\{ (2s-m+1)\, P_{m-1/s-1} + m P_{m/s-1} \right\} \quad \dots \quad (5)$$

— eine Rekursionsformel, die für alle m, aber nur für $s > 2$ gilt.

Da bei $s = 2$ unmittelbares Abzählen

$$P_{2/2} = {}^2/_3, \quad P_{1/2} = 0, \quad P_{0/2} = {}^1/_3$$

ergibt, so kann man durch sukzessive Anwendung der Formel (5) unter Berücksichtigung der Beziehung $P_{0/s} = 1 - (P_{s/s} + P_{s-1/s} + \dots + P_{1/s})$ die Fälle $s = 3$, $s = 4$ usw. erledigen.

Dieselbe Aufgabe kann auch auf eine andere Weise gelöst werden. Man stelle sich vor, daß die Elemente in einer vorgegebenen Ordnung zum Zusammensetzen des Zyklus kommen, und daß das Los entscheidet, zwischen welche Elemente das neu zukommende eingeordnet werden soll. Dann bleiben alle Reihenfolgen gleichwahrscheinlich in demselben Sinne wie früher.

Es sei $a_1 a_2$ das letzte Paar, das in dieser Weise in den Ring kommt. Um alle dabei möglichen Fälle möglichst kurz zur Darstellung bringen zu können, bezeichne man mit $(k/s-1)$ die Reihenfolge aus $2(s-1)$ Elementen mit k vereinigten Paaren. Da a_1 entweder zwischen gleiche oder zwischen verschiedene Elemente kommen kann, so bezeichne man den ersten Fall mit $(x a_1 x)$ und den zweiten mit $(x a_1 y)$. Kommt weiter a_2 neben a_1, so bezeichne man das mit $(x a_1 a_2 x)$ oder mit $x a_1 a_2 y)$; tritt aber a_2 nicht neben a_1, so seien die entsprechenden Bezeichnungen: $(z a_2 z)$ und $(z a_2 u)$. Die Entstehungsarten der Reihenfolge aus $2s$ Elementen mit m vereinigten Paaren können nun in folgender Weise dargestellt werden:

I $(m-1/s-1)\,(x a_1 y)\,(x a_1 a_2 y)$
II' $(m/s-1)\,(x a_1 y)\,(z a_2 u)$; II" $(m/s-1)\,(x a_1 x)\,(x a_1 a_2 x)$
III' $(m+1/s-1)\,(x a_1 x)\,(z a_2 u)$; III" $(m+1/s-1)\,(x a_1 y)\,(z a_2 z)$
IV $(m+2/s-1)\,(x a_1 x)\,(z a_2 z)$.

Berücksichtigt man, daß es für a_1 $2s-2$ und für a_2 $2s-1$ gleichmögliche Stellen im Ringe gibt, und zählt man die Stellen die jedem der oben angegebenen Fälle entsprechen, so kommt man zu der Rekursionsformel

$$P_{m/s} = \frac{1}{(2s-1)(2s-2)} \Big\{ 2 \overset{+}{\left(2s - \overline{m+1}\right)} P_{m-1/s-1} + \Big[\overset{+}{\left(2s - \overline{m+2}\right)} \overset{+}{\left(2s - \overline{m+3}\right)} + 2m\Big] P_{m/s-1}$$
$$+ 2(m+1) \overset{+}{\left(2s - \overline{m+3}\right)} P_{m+1/s-1} + (m+2)(m+1) P_{m+2/s-1} \Big\} \quad (6).$$

Sie gilt bei $s > 2$ und bei beliebigem $m \geqq 0$, wenn die Bezeichnungen $P_{i/k}$ und $\overset{+}{(A)}$ so zu verstehen sind, daß

$$P_{i/k} = 0 \text{ bei } i > k, \qquad \overset{+}{(A)} = A \text{ bei } A \geqq 0, \qquad \overset{+}{(A)} = 0 \text{ bei } A \leqq 0 \quad . \quad . \quad (7).$$

Aus dem Vergleich zweier Ausdrücke für $P_{m/s}$ (5) und (6) entsteht nun eine Beziehung zwischen $P_{m-1/s-1}$, $P_{m/s-1}$, $P_{m+1/s-1}$ und $P_{m+2/s-1}$; und setzt man $m+1$ an die Stelle von m und $s+1$ an die Stelle von s, so erhält man:

$$P_{m/s} = \frac{m+1}{(2s-m)(2s-2m)} \Big\{ \Big[\overset{+}{\left(2s - \overline{m+1}\right)} \overset{+}{\left(2s - \overline{m+2}\right)} - \overset{+}{(2s - 2m)}\Big] P_{m+1/s}$$
$$+ 2(m+2) \overset{+}{\left(2s - \overline{m+2}\right)} P_{m+2/s} + (m+2)(m+3) P_{m+3/s} \Big\} \quad (8),$$

— die Rekursionsformel, die unter den Bedingungen (7) für $m \geqq 0$ und $s \geqq 2$ gilt.

Diese Formel hätte den Vorzug vor (5) und (6), daß sie die unmittelbare sukzessive Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten $P_{s-1/s}$, $P_{s-2/s} \ldots P_{1/s}$, $P_{0/s}$ ermöglichte, wenn nur die Wahrscheinlichkeit $P_{s/s}$ unmittelbar gefunden werden könnte. Das ist auch wirklich der Fall, da aus der Formel (6) folgt, daß

$$P_{s/s} = \frac{1}{2s-1} P_{s-1/s-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

ist, und da $P_{2/2} = {}^2/_3$ ist, so hat man $P_{3/3} = \frac{2}{3 \cdot 5}$, $P_{4/4} = \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7}$ usw. oder allgemein

$$P_{s/s} = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2s-1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

für alle Werte von $s \geqq 2$.

Zahlentafel I enthält die Werte von $P_{m/s}$ für $s = 1$ bis 6.

Zahlentafel I.

s	m	$P_{m/s}$		s	m	$P_{m/s}$	
1	0	0		5	0	293/945	0,31005
	1	1			1	360/945	0,38095
2	0	1/3	0,33333		2	205/945	0,21693
	1	0	0,00000		3	70/945	0,07407
	2	2/3	0,66667		4	15/945	0,01587
3	0	4/15	0,26667		5	2/945	0,00212
	1	6/15	0,40000				
	2	3/15	0,20000	6	0	3326/10395	0,31996
	3	2/15	0,13333		1	3948/10395	0,37980
4	0	31/105	0,29524		2	2190/10395	0,21067
	1	40/105	0,38095		3	740/10395	0,07119
	2	24/105	0,22857		4	165/10395	0,01587
	3	8/105	0,07619		5	24/10395	0,00231
	4	2/105	0,01905		6	2/10395	0,00019

Mit dem Wachsen von s nähern sich die Werte von $P_{m/s}$ den Grenzwerten, die durch die Poissonsche Formel gegeben werden, wenn man in dieser für die Wahrscheinlichkeit des Einzelereignisses $p = 1/s$ und für die Zahl der Versuche s setzt. In der Tat, die Formel (6) zeigt uns, daß

$$\lim P_{m/s}\Big|_{s=\infty} = \lim P_{m/s-1}\Big|_{s=\infty} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

und die Formel (5) unter Berücksichtigung der Formel (11) gibt

$$\lim P_{m/s}\Big|_{s=\infty} = \frac{1}{m} \lim P_{m-1/s}\Big|_{s=\infty} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Bezeichnet man $\lim\limits_{s=\infty} P_{m/s}$ mit P_m, so hat man: $P_1 = P_0$, $P_2 = \frac{1}{2!} P_0$, $P_3 = \frac{1}{3!} P_0 \ldots$, woraus unter Berücksichtigung der Beziehung $P_0 + P_1 + \ldots + P_s = 1$

$$P_0 = e^{-1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

und

$$P_m = \frac{e^{-1}}{m!} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

hervorgehen. Zum Vergleich mit den Zahlen der vorigen Zahlentafel wollen wir die ersten sieben dieser Grenzwahrscheinlichkeitswerte angeben (siehe Zahlentafel II).

Zahlentafel II.

$m =$	0	1	2	3	4	5	6	.....
$P_m =$	0,36788	0,36788	0,18394	0,06131	0,01533	0,00307	0,00051	.....

Man sieht daraus, daß schon bei $s = 6$ die Werte von $P_{m/s}$ sich merklich den Grenzwerten nähern. Es würde sich lohnen, Näherungsformeln für $P_{0/s}$, $P_{1/s} \ldots$ aufzusuchen, da die Formel (5), (6) und (8) bei einigermaßen großen s eine fast unausführbare Arbeitsleistung erfordern würden. Zu diesem Zwecke kann man von der Formel (8) ausgehen. Man bestimme daraus $P_{m+1/s}$ und setze $m - 1$ für m. Dann hat man zunächst

$$P_{m/s} = \frac{1}{m\left[\left(1 - \frac{m}{2s}\right)\left(1 - \frac{m+1}{2s}\right) - \left(1 - \frac{2m-2}{2s}\right) \cdot \frac{1}{2s}\right]} \left\{\left(1 - \frac{m-1}{2s}\right)\left(1 - \frac{2m-2}{2s}\right) P_{m-1/s} \right.$$
$$\left. - \frac{2(m+1)}{2s}\left(1 - \frac{m+1}{2s}\right) P_{m+1/s} - \frac{m+1}{2s} \cdot \frac{m+2}{2s} P_{m+2/s} \right\},$$

was nach den Potenzen von $\frac{1}{2s}$ entwickelt, in eine Näherungsformel

$$P_{m/s} = \frac{1}{m}\left[1 - \frac{m-5}{2s} - \frac{m^2 - m - 14}{(2s)^2} + \ldots\right] P_{\frac{m-1}{s}} - \left[\frac{2(m+1)}{2s} + \frac{2(m+1)^2}{(2s)^2} + \ldots\right] P_{\frac{m+1}{s}}$$
$$- \frac{(m+1)(m+2)}{(2s)^2} P_{m+2/s} \quad (15)$$

übergeht. Setzt man hier sukzessive $m + 1$, $m + 2$, $m + 3$ für m, so erhält man analoge Formeln für $P_{m+1/s}$, $P_{m+2/s}$, $P_{m+3/s} \ldots$ Diese Ausdrücke setze man in (15) ein, dann in das Resultat dieser Substitution usw., bis alle Koeffizienten bei $P_{m+1/s}$, $P_{m+2/s} \ldots\ldots$ nicht unter die zweite Ordnung in $\frac{1}{2s}$ sinken werden. Dann hat man:

$$P_{m/s} = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{m-3}{2s} - \frac{m^2 - 3m - 1}{(2s)^2} + \ldots\right) P_{m-1/s} + \ldots \quad (16).$$

Setzt man hier für m die Werte 1, 2, 3 ... 13 ein und addiert man die daraus entstehenden Ausdrücke, so findet man

$$P_0 = \frac{1}{e + \frac{4{,}07742}{2s} + \frac{8{,}49463}{(2s)^2} + \ldots} \quad \ldots \ldots \quad (17).$$

Bei $s = 6$ erhält man daraus $P_{0/6} = 0{,}32082$ und die Formel (16) gibt uns dann die Werte:

Zahlentafel III.

$m =$	0	1	2	3	4	5	6
$P_{m/6}$ angen. =	0,321	0,381	0,210	0,071	0,016	0,002	0,0003
$P_{m/6}$ genau =	0,320	0,380	0,211	0,071	0,016	0,002	0,0002

Berücksichtigt man, daß $2s = 12$ noch keine sehr große Zahl ist, so darf man diese Annäherung als eine ziemlich gute ansehen. Die Fehler sind von der Ordnung $\frac{1}{(2s)^3}$.

2. Fall zweier nicht unterscheidbarer Paare. Nun wollen wir noch einen komplizierteren Fall untersuchen, der aus dem vorigen hervorgeht, wenn die Elemente zweier bestimmter Paare ununterscheidbar werden. Dann hat man also $2s-4$ Elemente

der ersten Gruppe, die paarweise, und 4 Elemente der zweiten Gruppe, die alle untereinander gleich sind und die man mit a_1, a_2, a_3, a_4 oder mit a, a, a, a bezeichnen kann. Die Zahl der vereinigten Paare in der ersten Gruppe sei k, was aber die zweite Gruppe betrifft, so ergeben sich folgende Arten ihrer Zusammensetzung: (1) $a \ldots a \ldots a \ldots a$, (2) $aa \ldots a \ldots a$, (3) $aa \ldots aa$, (4) $aaa \ldots a$, (5) $aaaa$, was — mit k vereinigten Paaren der ersten Gruppe kombiniert — in folgender Weise bezeichnet werden kann:

$$\frac{k,0}{s(2)}, \quad \frac{k,1}{s(2)}, \quad \frac{k,2}{s(2)}, \quad \frac{k,01}{s(2)}, \quad \frac{h,001}{s(2)}.$$

Zählt man eine Vereinigung von drei oder vier Elementen der zweiten Gruppe als äquivalent zu zwei bzw. drei vereinigten Paaren, so möge dis Zahl sämtlicher in diesem Sinne »vereinigten Paare«, die $k+0$, oder $k+1$, oder $k+2$, oder $k+3$ beträgt, mit l bezeichnet werden.

Ehe wir zur Ermittelung der Wahrscheinlichkeiten von dem Typus $\frac{k,h}{s(2)}$ übergehen, wollen wir mit $P_{k/s}'$ und $P_{k/s}''$ die Wahrscheinlichkeiten bezeichnen dafür, daß in dem Zyklus von $2s$ paarweise gleicher Elemente k-Paare vereinigt sind, unter denen ein bestimmtes Paar sich befindet bzw. sich nicht befindet. Es ist leicht einzusehen, daß

$$P_{k|s}' = \frac{C_{s-1}^{k-1}}{C_s^k} P_{k/s} = \frac{k}{s} P_{k/s} \quad \ldots \ldots \ldots (18)$$

und

$$P_{k/s}'' = P_{k/s} - P_{k/s}' = \frac{s-k}{s} P_{k/s} \quad \ldots \ldots \ldots (19).$$

Nun stelle man sich vor, daß man einen Zyklus, der aus $s-1$ Paaren gebildet ist, vor sich habe, und das letzte Paar, das darin noch eingefügt werden muß, $a_3\,a_4$ sei. Man bezeichne mit $\frac{k,i}{s-1}$ die Anordnung dieser Art, die aus $2(s-1)$ Elementen besteht, unter denen k vereinigte Paare aus den Elementen der ersten Gruppe und $i\,(=0$ oder $1)$ vereinigte Paare aus den Elementen der zweiten Gruppe sich befinden. Nun wollen wir die möglichen Fälle der Einfügung der Elemente $a_3\,a_4$ in eine Anordnung in analoger Weise, wie früher, symbolisch darstellen. Dabei mögen die Bezeichnungen $(x\,a_3\,x)$, $(x\,a_3\,y)$, $(z\,a_4\,z)$, $(z\,a_4\,u)$, $(x\,a_3\,a_4\,x)$, $(x\,a_3\,a_4\,y)$ die Fälle darstellen, wo a_3 und a_4 nicht neben a_1 und a_2 kommen; mit (aa_3) mögen die Fälle: $(a_1\,a_3\,x)$, $(a_2\,a_3\,x)$, $(x\,a_3\,a_1)$ und $(x\,a_3\,a_2)$ symbolisiert werden; mit (aaa_3) bezeichne man die Fälle: $(a_3\,aa)$, $(aa_3\,a)$ und (aaa_3); usw.

Jetzt gehen wir zur Darstellung der möglichen Fälle über. $\frac{k,0}{s(2)}$ kann lediglich aus $\frac{k,0}{s-1}$, $\frac{k+1,0}{s-1}$, $\frac{k+2,0}{s-1}$ entstehen, und zwar in folgender Weise: (α) $\left(\frac{k,0}{s-1}\right)$ $(x\,a_3\,y)$ $(z\,a_4\,u)$; (β) $\left(\frac{k+1,0}{s-1}\right)$ $(x\,a_3\,x)$ $(z\,a_4\,u)$ oder $\left(\frac{k+1,0}{s-1}\right)$ $(x\,a_3\,y)$ $(z\,a_4\,z)$; (γ) $\left(\frac{k+2,0}{s-1}\right)$ $(x\,a_3\,x)$ $(z\,a_4\,z)$. Führt man noch die ohne weiteres verständlichen Bezeichnungen: $P_{\frac{k,0}{s-1}}$, $P_{x\,a_3\,y}$, $P_{x\,a_3\,x}$ usw. ein, so hat man:

$$P_{\frac{k,0}{s(2)}} = P_{\frac{k,0}{s-1}} \cdot P_{x\,a_3\,y} \cdot P_{z\,a_4\,u} + P_{\frac{k+1,0}{s-1}} \left[P_{x\,a_3\,x} P_{z\,a_4\,u} + P_{x\,a_3\,y} P_{z\,a_4\,z}\right] + P_{\frac{k+2,0}{s-1}} \cdot P_{x\,a_3\,x} \cdot P_{z\,a_4\,z} \quad (20).$$

In ganz ähnlicher Weise findet man weiter:

$$\left.\begin{aligned} P_{\frac{k,1}{s(2)}} = {} & P_{\frac{k,0}{s-1}} \left[P_{a\,a_3} P_{z\,a_4\,u} + P_{x\,a_3\,y} P_{a\,a_4}\right] + P_{\frac{k,1}{s-1}} P_{x\,a_3\,y}\, P_{z\,a_4\,u} \\ & + P_{\frac{k+1,0}{s-1}} \left[P_{a\,a_3} P_{z\,a_4\,z} + P_{x\,a_3\,x} P_{a\,a_4}\right] + P_{\frac{k+1,1}{s-1}} \left[P_{x\,a_3\,x} P_{z\,a_4\,u} + P_{x\,a_3\,y} P_{z\,a_4\,z}\right] \\ & + P_{\frac{k+2,1}{s-1}} P_{x\,a_3\,x}\, P_{z\,a_4\,z} \end{aligned}\right\} \quad (21).$$

$$P_{\frac{k,2}{s(2)}} = P_{\frac{k,0}{s-1}} P_{a\,a_3} P_{a\,a_4} + P_{\frac{k,1}{s-1}} P_{x\,a_3\,y} P_{x\,a_3\,a_4\,y} + P_{\frac{k+1,1}{s-1}} P_{x\,a_3\,x} P_{x\,a_3\,a_4\,x} \quad \ldots \ldots (22).$$

$$\left.\begin{aligned} P_{\frac{k,01}{s(2)}} = {} & P_{\frac{k,0}{s-1}} P_{a\,a_3} P_{a\,a_3\,a_4} + P_{\frac{k,1}{s-1}} \left[P_{a\,a\,a_3} P_{z\,a_4\,u} + P_{x\,a_3\,y} P_{a\,a\,a_4}\right] \\ & + P_{\frac{k+1,1}{s-1}} \left[P_{a\,a\,a_3} P_{z\,a_4\,z} + P_{x\,a_3\,x} P_{a\,a\,a_4}\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (23).$$

$$P_{\substack{k,001\\ s(2)}} = P_{\substack{k,1\\ s-1}} \, P_{a a e_3} P_{a a a_3 a_4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24).$$

Berücksichtigt man, daß $P_{\substack{k,0\\ s-1}} = P_{\substack{k\\ s-1}}''$, $P_{\substack{k+1,0\\ s-1}} = P_{\substack{k+1\\ s-1}}''$, $P_{\substack{k+2,0\\ s-1}} = P_{\substack{k+2\\ s-1}}''$, $P_{\substack{k,1\\ s-1}} = P_{\substack{k+1\\ s-1}}'$, $P_{\substack{k+1,1\\ s-1}} = P_{\substack{k+2\\ s-1}}'$, $P_{\substack{k+2,1\\ s-1}} = P_{\substack{k+3\\ s-1}}'$, so ermittelt man diese Wahrscheinlichkeiten nach den Formeln (18) und (19). Was die Wahrscheinlichkeiten von dem Typus $P_{x a_3 x}$, $P_{x a y}$, $P_{a a_3}$, $P_{a a a_3 a_4}$ usw. betrifft, so ist es leicht, sie durch Abzählen der günstigen und der möglichen Fälle unmittelbar zu bestimmen. Setzt man entsprechende Ausdrücke in (20) bis (24) ein, so hat man:

$$P_{\substack{k,0\\ s(2)}} = \frac{1}{(s-1)(2s-1)(2s-2)} \left\{ \overset{+}{(s-\overline{k+1})} \overset{+}{(2s-\overline{k+6})} \overset{+}{(2s-\overline{k+7})} P_{\substack{k\\ s-1}} + 2 \overset{+}{(s-\overline{k+2})} \overset{+}{(2s-\overline{k+7})} (k+1) P_{\substack{k+1\\ s-1}} + \overset{+}{(s-\overline{k+3})} (k+1)(k+2) P_{\substack{k+2\\ s-1}} \right\} \quad (25),$$

$$P_{\substack{k,1\\ s(2)}} = \frac{1}{(s-1)(2s-1)(2s-2)} \left\{ 10 \overset{+}{(s-\overline{k+1})} \overset{+}{(2s-\overline{k+6})} P_{\substack{k\\ s-1}} + [\overset{+}{(2s-\overline{k+5})} \overset{+}{(2s-\overline{k+6})} + 10 \overset{+}{(s-\overline{k+2})}] (k+1) P_{\substack{k+1\\ s-1}} + 2 \overset{+}{(2s-\overline{k+6})} (k+1)(k+2) P_{\substack{k+2\\ s-1}} + (k+1)(k+2)(k+3) P_{\substack{k+3\\ s-1}} \right\} \quad (26),$$

$$P_{\substack{k,2\\ s(2)}} = \frac{1}{(s-1)(2s-1)(2s-2)} \left\{ 8 \overset{+}{(s-\overline{k+1})} P_{\substack{k\\ s-1}} + 2 \overset{+}{(2s-\overline{k+5})} (k+1) P_{\substack{k+1\\ s-1}} + 2(k+1)(k+2) P_{\substack{k+2\\ s-1}} \right\} \quad \ldots \quad (27),$$

$$P_{\substack{k,01\\ s-(2)}} = -\frac{6}{(s-1)(2s-1)(2s-2)} \left\{ 2 \overset{+}{(s-\overline{k+1})} P_{\substack{k\\ s-1}} + \overset{+}{(2s-\overline{k+5})} (k+1) P_{\substack{k+1\\ s-1}} + (k+1)(k+2) P_{\substack{k+2\\ s-1}} \right\} \quad \ldots \quad (28),$$

$$P_{\substack{k,001\\ s-(2)}} = \frac{12(k+1)}{(s-1)(2s-1((2s-2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29).$$

Mit diesen Rekursionsformeln haben wir die folgenden Zahlentafeln IV und V für den Fall von zehn Elementen, von denen 6 paarweise und 4 alle untereinander gleich sind, berechnet. Hier bedeutet $P_{\substack{-h_j\\ s(2)}}$ die Summe $\sum^{k} P_{\substack{k_i, h_j\\ s(2)}}$ und $P_{\substack{k_i-\\ s(2)}}$ die Summe $\sum^{h} P_{\substack{k_i, h_j\\ s(2)}}$.

Zahlentafel IV.

$P_{\substack{0\,0\\ 5(2)}} = \frac{48}{630} = 0{,}07619$		
$P_{\substack{1,0\\ 5(0)}} = \frac{24}{630} = 0{,}03810$	$P_{\substack{0.1\\ 5(2)}} = \frac{154}{630} = 0{,}24444$	
$P_{\substack{2,0\\ 5(2)}} = \frac{3}{630} = 0{,}00476$	$P_{\substack{1.1\\ 5(2)}} = \frac{114}{630} = 0{,}18095$	$P_{\substack{0,01\\ 5(2)}} = \frac{62}{630} = 0{,}09841$
$P_{\substack{3,0\\ 5(2)}} = 0$	$P_{\substack{2,1\\ 5(2)}} = \frac{30}{630} = 0{,}04762$	$P_{\substack{1,01\\ 5(2)}} = \frac{60}{630} = 0{,}09524$
	$P_{\substack{3,1\\ 5(2)}} = \frac{2}{630} = 0{,}00317$	$P_{\substack{2\,01\\ 5(1)}} = \frac{24}{630} = 0{,}03810$
		$P_{\substack{3,01\\ 5(2)}} = \frac{4}{630} = 0{,}00635$
$P_{\substack{-,0\\ 5(2)}} = \frac{75}{630} = 0{,}11905$	$P_{\substack{-,1\\ 5(2)}} = \frac{300}{630} = 0{,}47619$	$P_{\substack{-,01\\ 5(2)}} = \frac{150}{630} = 0{,}23810$

Noch: Zahlentafel IV.

		$p^{0}_{\overline{5(2)}} = \frac{48}{630} = 0,0761905$
		$p^{1}_{\overline{5(2)}} = \frac{178}{630} = 0,2825397$
$p^{0,2}_{\overline{5(2)}} = \frac{31}{630} = 0,04921$		$p^{2}_{\overline{5(2)}} = \frac{210}{630} = 0,3333333$
$p^{1,2}_{\overline{5(2)}} = \frac{30}{630} = 0,04762$	$p^{0,001}_{\overline{5(2)}} = \frac{10}{630} = 0,01587$	$p^{3}_{\overline{5(2)}} = \frac{130}{630} = 0,2063492$
$p^{2,2}_{\overline{5(2)}} = \frac{12}{630} = 0,01905$	$p^{1,001}_{\overline{5(2)}} = \frac{12}{630} = 0,01905$	$p^{4}_{\overline{5(2)}} = \frac{50}{630} = 0,0793651$
$p^{3,2}_{\overline{5(2)}} = \frac{2}{630} = 0,00317$	$p^{2,001}_{\overline{5(2)}} = \frac{6}{630} = 0,00952$	$p^{5}_{\overline{5(2)}} = \frac{12}{630} = 0,0190476$
	$p^{3,001}_{\overline{5(2)}} = \frac{2}{630} = 0,00317$	$p^{6}_{\overline{5(2)}} = \frac{2}{630} = 0,0031746$
$p^{-,2}_{\overline{5(2)}} = \frac{75}{630} = 0,11905$	$p^{-,001}_{\overline{5(2)}} = \frac{30}{630} = 0,04762$	1,0000000 / 1,00001

Zahlentafel V.

$p^{0,-}_{\overline{5(2)}} = \frac{305}{630} = 0,48413$	$p^{1,-}_{\overline{5(2)}} = \frac{240}{630} = 0,38095$	$p^{2,-}_{\overline{5(2)}} = \frac{75}{630} = 0,11905$	$p^{3,-}_{\overline{5(2)}} = \frac{10}{630} = 0,01587$

Die Wahrscheinlichkeit $P^{l}_{\overline{s(2)}}$ ist eine Summe der Wahrscheinlichkeiten $P^{k_i, h_j}_{\overline{s(2)}}$, die bei der von uns eingeführten Zusammenlegung von k_i und h_j die Summe l ergeben; so z. B. $P^{2}_{\overline{5(2)}} = P^{2,0}_{\overline{5(2)}} + P^{1,1}_{\overline{5(2)}} + P^{0,01}_{\overline{5(2)}} + P^{0,2}_{\overline{5(2)}}$ usw.

3. Versuchsergebnisse. Die theoretischen Berechnungen können nun mit Resultaten einer Reihe von Versuchen verglichen werden, die vor allem zu dem Zwecke angestellt waren, um festzustellen, ob etwaige Verschiedenheiten in Form und Größe der sich zyklisch zusammenlegenden Körpern auf die Gleichmöglichkeit einzelner Anordnungen einen bemerkbaren Einfluß ausüben. Die Anordnung der Experimente war die folgende.

Eine runde Schachtel mit gewölbtem Boden, zehn Stück Bohnen (Phaseolus Vulgaris) enthaltend, wurde während rd. 12—15 Sekunden nach einer und derselben für alle Versuche festgesetzten Regel kräftig gerüttelt. Dann wurde sie mit einem leisen Schütteln in eine horizontale Stellung gebracht, so daß die Bohnen sich von selbst kreisförmig auf den Boden legten. Es wurden 3000 Versuche ausgeführt, die in drei Serien von gleichem Umfang eingeteilt waren. Während der ersten Serie wurde die Schachtel gleich nach Beendigung des kräftigen Rüttelns geöffnet und in fast horizontaler Stellung so lange leise geschüttelt, bis eine zyklische Anordnung sich einstellte. Während der zwei letzten Serien aber wurde die Schachtel nur nach Beendigung der ganzen Prozedur geöffnet und, war die Anordnung der Bohnen noch keine zyklische, so wurde die Prozedur von neuem nach derselben Regel wiederholt usf. bis zu dem schließlichen Erfolge. So wurden, wie wir glauben, alle persönlichen Einflüsse gänzlich ausgeschlossen.

Alle Versuche wurden mit zwei schwarzen, zwei grünen, zwei roten und vier weißen Bohnen ausgeführt: die ersten beiden Serien mit einem und demselben und die dritte mit einem anderen Satze. Die Bohnen des ersten Satzes waren dabei mehr von einander verschieden als diejenigen der zweiten, wie die Tafel VI zeigt.

Zahlentafel VI.

Die Bohnen	Dimensionen der Bohnen in mm					
	I. und II. Serie			III. Serie		
	Länge	Breite	Dicke	Länge	Breite	Dicke
Schwarze 1	8,9	5,7	4,2	14,4	9,0	8,1
2	9,0	6,0	4,6	14,0	8,8	7,9
Grüne . . 1	13,9	5,8	3,1	16,0	8,3	7,5
2	13,5	5,9	3,5	15,8	7,5	6,9
Rothe . . 1	15,0	7,5	6,0	18,9	8,4	6,6
2	15,0	7,5	5,5	17,2	7,9	6,0
Weiße . . 1	11,0	8,9	8,0	18,2	8,9	6,9
2	10,5	8,9	8,0	18,2	8,8	7,0
3	10,8	9,0	8,0	18,0	8,8	7,3
4	11,0	8,7	8,0	17,7	8,9	6,9

In den weiteren Tafeln (VII—X) bedeuten: k die Zahl der vereinigten Paare in der ersten (»farbigen«) Gruppe und h die Zahl der Verbindungen in der zweiten (»weißen«) Gruppe. Dabei bedeutet, wie oben: $h = 1$ und $h = 2$ ein bzw. zwei weiße Paare, $h = 01$ — eine Verbindung zu drei, und $h = 001$ — eine Verbindung zu vier. Mit l wird die Zahl der festsetzungsgemäß gezählten Paare bezeichnet (01 für zwei und 001 für drei Paare gerechnet). Weiter bedeutet n' die durch das Experiment gefundene (»empirische«) und n die theoretische Zahl der Fälle jeder Kategorien und ε die Differenz $n' - n$. Ist die Gesamtzahl der Versuche $N = 1000$ nach m Gruppen eingeteilt: $n_1', n_2', \ldots n_m'$, so ist das Verhältnis von Theorie und Erfahrung mittels der Größe:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{i} \frac{\varepsilon_i^2}{n_i} \quad \ldots \ldots , \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

zu prüfen[1]). Für die mathematische Erwartung und den mittleren Fehler von χ^2 hat man folgende Ausdrücke[2])

$$E(\chi^2) = m - 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (31),$$

$$\sigma_{\chi^2} = \sqrt{\frac{N-1}{N} \cdot 2(m-1) + \frac{1}{N}\left[\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{P_i}\right) - m^2\right]} \quad \ldots \ldots \quad (32),$$

wo N und m die oben angegebene Bedeutung haben und mit p_i die Wahrscheinlichkeit des i—en Ereignisses bei einem einzelnen Versuche (also unsere $\underset{s(2)}{P_{k,h}}$ oder unsere $\underset{s(2)}{P_{-,h}}$ usw.) bezeichnet wird.

Setzt man

$$\varepsilon_{\chi^2} = \chi^2 - E(\chi^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (33),$$

so wird durch das Verhältnis $|\varepsilon_{\chi^2} / \sigma_{\chi^2}|$ das Kriterium angegeben, an dem das Verhältnis von Theorie und Beobachtung geprüft werden kann. Ist diese Größe kleiner oder nur ein wenig größer als 1, so können die Abweichungen der empirischen Verteilung von der theoretischen als zufällige gelten, was bei unserer Serie III der Fall ist. Ist diese Größe beträchtlich größer als 1 (6,64 und 6,54 in den Serien I und II), so wird die Hypothese vom Zufall hinfällig und für die Divergenz zwischen der Theorie und Erfahrung muß eine andere Erklärung gesucht werden. Durch die Ermittelung der Wahrscheinlichkeit eines Systems zufälliger Abweichungen, die einem gegebenen Falle entsprechen, kann diesem Urteil eine präzisere Fassung gegeben werden[3]), in unserem Falle aber sind die Resultate so unzweideutig, daß zur Anwendung dieser Methode eigentlich keine dringende Veranlassung besteht.

---

[1]) K. Pearson, On the Criterion etc., Philos. Magazine, Vol. 50, 1900, p. 157 ff. L. v. Bortkiewicz, Die Iterationen 1917, S. 62 ff.

[2]) L. v. Bortkiewicz, l. cit. S. 62, 64.

[3]) K. Pearson, l. cit.

Derselbe, Tables for Statisticians and Biometricians, 1914.

L. v. Bortkiewicz, Das Helmertsche Verteilungsgesetz für die Quadratsumme zufälliger Beobachtungsfehler, Zeitschr. f. angew. Mathematik und Mechanik, 1922, Bd. 2, Heft 5, S. 358 ff.

Berücksichtigt man die Tafeln IV und V, so fallen die Größen $E\chi^2$ und σ_{χ^2} nach den Formeln (31) und (32) so aus:

$$E\chi_k^2 = 3\,; \qquad E\chi_h^2 = 6\,; \qquad E\chi_l^2 = 6\,,$$
$$\sigma_{\chi_k^2} = 2{,}46\,; \qquad \sigma_{\chi_h^2} = 2.83\,; \qquad \sigma_{\chi_l^2} = 3{,}51\,,$$

woraus nach den Ergebnissen der Berechnungen in den drei letzten Kolonnen der Tafeln VII – IX sich eine folgende Zusammenstellung in der Tafel X ergibt.

Zahlentafel VII.

k	Theorie n_k	1. Serie n_k'	2. Serie n_k''	3. Serie n_k'''	ε_k'	ε_k''	ε_k''	$\frac{(\varepsilon_k')^2}{n_k}$	$\frac{(\varepsilon_k'')^2}{n_k}$	$\frac{(\varepsilon_k''')^2}{n_k}$
0	484,13	468	499	477	− 16.13	+ 14,87	− 7,13	0,537	0,457	0,105
1	380,95	393	384	386	+ 12,05	+ 3,05	+ 5,05	0.381	0,024	0,067
2	119,05	126	97	117	+ 6,95	− 22,05	− 2,05	0.406	4,084	0,035
3	15,87	13	20	20	− 2.87	+ 4.13	+ 4,13	0.519	1.075	1,075
	1000,00	1000	1000	1000				$\chi_k^2 = 1{,}843$	$\chi_k^2 = 5{,}640$	$\chi_k^2 = 1{,}282$

Zahlentafel VIII.

h	Theorie n_h	1. Serie n_h'	2. Serie n_h''	3. Serie n_h'''	ε_h'	ε_h''	ε_h'''	$\frac{(\varepsilon_h')^2}{n_h}$	$\frac{(\varepsilon_h'')^2}{n_h}$	$\frac{(\varepsilon_h''')^2}{n_h}$
0	119,05	160	148	121	+ 40,95	+ 28,95	+ 1,95	14,086	7,040	0,032
1	476,19	489	514	448	+ 12,81	+ 37,81	− 28,19	0,344	3,002	1 669
01	238,10	217	203	256	− 21,10	− 35,10	+ 17,90	1,870	5,174	1,346
2	119,05	94	103	127	− 25,05	− 16,05	+ 7,95	5,271	2,164	0,531
001	47,62	40	32	48	− 7.62	− 15.62	+ 0,38	1.219	5,124	0.003
	1000,01	1000	1000	1000				$\chi_h^2 = 22{,}790$	$\chi_h^2 = 22{,}504$	$\chi_h^2 = 3{,}581$

Zahlentafel IX.

l	Theorie n_l	1. Serie n_l'	2. Serie n_l''	3. Serie n_l'''	ε_l'	ε_l''	ε_l'''	$\frac{(\varepsilon_l')^2}{n_l}$	$\frac{(\varepsilon_l'')^2}{n_l}$	$\frac{(\varepsilon_l''')^2}{n_l}$
0	76,19	99	88	76	+ 22.81	+ 11,81	− 0,19	6,829	1,831	0,000
1	282,54	290	339	273	+ 7,46	+ 56,46	− 9,54	0,197	11,282	0,322
2	333,33	325	307	324	− 8,33	− 26,33	− 9.33	0,208	2,080	0.261
3	206,35	193	180	222	− 13,35	− 26,35	+ 15,65	0,864	3,365	1.187
4	79,37	73	67	77	− 6,37	− 12,37	− 2,37	0,511	1,928	0,071
5	19,05	16	16	25	− 3,05	− 3,05	+ 5,95	0,488	0,488	1,858
6	3,17	4	3	3	+ 0,83	− 0,17	− 0,17	0,217	0,009	0.009
	1000,00	1000	1000	1000				$\chi_l^2 = 9{,}314$	$\chi_l^2 = 20{,}983$	$\chi_l^2 = 3{,}708$

Zahlentafel X.

Serie	i	χ_i^2	$\varepsilon_{\chi^2} = \chi^2 - E(\chi^2)$	$\frac{\lvert\varepsilon_{\chi^2}\rvert}{\sigma_{\chi^2}}$
I	k	1,84	− 1,16	0,47
	h	22,79	+ 18,79	6,64
	l	9,31	+ 3,31	0.94
II	k	5.64	+ 2.64	1,07
	h	22,50	+ 18.50	6,54
	l	20,98	+ 14,98	4,27
III	k	1,28	− 1,72	0,70
	h	3,58	− 0,42	0,15
	l	3,71	− 2,29	0,65

Nun sehen wir, daß, während die Zahlen der Serie III aus den Grenzen der lediglich zufälligen Schwankungen nicht heraustreten, die erste und die zweite Serie Abweichungen zeigen, die ihren mittleren Fehler 6,64- und 6,54-Mal übertreffen, und deren Wahrscheinlichkeiten nach Eldertons Tabellen demnach $P = 0{,}00014$ und $P = 0{,}00016$ sind.

Betrachtet man die Zahlen unserer Tafeln VII—IX genauer, so sieht man, daß die Verteilung der farbigen Bohnen lediglich den zufälligen Schwankungen unterworfen erscheint und daß die ganze Diskrepanz zwischen der Theorie und Erfahrung lediglich auf Rechnung der weißen Bohnen gesetzt werden muß. Diese Sachlage bedarf einer Erklärung m. E. aus den Gesetzen der theoretischen Mechanik, die aus dem Rahmen dieser Arbeit heraustritt. Mit einem gewissen Vorbehalte will ich aber es versuchen, eine Hypothese aufzustellen, die vielleicht auf die richtige Spur zu führen vermag.

Nehmen wir an, daß jedes Körperchen gleiche Chancen besitzt, auf irgendeine Stelle des Ringes zu kommen, daß aber für zwei solche Körper, die zufälligerweise im Prozesse des Aufrüttelns zusammengetroffen sind, die Wahrscheinlichkeit, sich nach kurzem Schütteln nebeneinander zu legen, größer ist als für zwei geschiedene. Wenn diese Wahrscheinlichkeit für alle Paare gleich wäre, dann würden auch alle Anordnungen in der definitiven Verteilung nach einem hinreichend langen Schütteln praktisch gleiche Wahrscheinlichkeiten haben, denn der Zusammenhang zwischen den Körpern, der durch anfängliches Nebeneinanderliegen statuiert ist, strebt mit jedem Aufschütteln rasch der Null zu. Wenn man aber annimmt, daß die Wahrscheinlichkeit, daß zwei Körperchen, die zusammenliegen, nach einem Aufschütteln von einander nicht geschieden werden, für ein Paar größer (oder kleiner) als für die übrigen Paare ist, so wird für ein solches stabileres (bzw. minder stabiles) Paar eine Tendenz bestehen, öfters (bzw. seltener) zum Vorschein zu kommen, als es dem Falle gleicher Wahrscheinlichkeiten aller Anordnungen entspricht. Wären nun unsere weißen Bohnen der ersten und zweiten Serie so beschaffen, daß sie, z. B. wegen ihrer relativen »Kugelförmigkeit«, vielleicht auch ihrer Größe, bei ihrem Zusammentreffen minder stabile Paare ausmachten, so könnten darin die Ergebnisse unserer Versuche eine Erklärung finden. 414

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Die Ermittlung der Drehspannungen in geraden zylindrischen Stäben.

Von H. SELLENTIN †.

1. Die Schubkraftfläche. Aus einem nur auf Drehung beanspruchten geraden zylindrischen Stabe werde durch zwei senkrecht zur Achse geführte Schnitte eine Scheibe von der Höhe 1 herausgeschnitten, die wiederum durch zwei parallel zur Stabachse gelegte Schnitte AA_1 und BB_1 in Teilstücke zerlegt werde. Letztere müssen für sich unter dem Einfluß der in den Schnittflächen vorhandenen Spannungen im Gleichgewicht sein. Da Zug- und Druckbeanspruchungen des Stabes ausgeschlossen sind, so können in den Stabquerschnitten nur Schubspannungen auftreten, deren Abhängigkeit von dem wirkenden Drehmoment zu bestimmen ist.

Die im Punkte P der Querschnittsfläche wirkende Schubspannung τ (Abb. 1) werde senkrecht und parallel zu AA_1 in die Spannungskomponenten τ_x und τ_y zerlegt; dann tritt τ_x auch in der Schnittfläche AA^1 und τ_y in der Schnittfläche BB_1 im Punkte P senkrecht zum Stabquerschnitt, also parallel zur Stabachse auf. In gleicher Weise werden für alle anderen Punkte der Schnittlinien AA_1 und BB_1 parallel zur Stabachse wirkende Schubspannungen gefunden, deren Größe durch die Ordinaten der eingezeichneten Kurven τ_x und τ_y dargestellt seien. Sie sind die einzigen auf die Teilstücke wirkenden axialen Spannungen, weswegen die algebraische Summe der von ihnen herrührenden Kräfte für jedes Teilstück gleich Null sein muß.

Auf den Abschnitt PA des Schnittes AA_1 wirkt unter dem Einfluß der Schubspannungen eine Schubkraft s, deren Größe durch das schraffierte Stück der Schubspannungskurve dargestellt ist. Dieselbe Kraft s muß in dem Teilstück PB des Schnittes BB_1 in entgegengesetzter Richtung wirken. Somit ist der Flächeninhalt des schraffierten Teils der Schub-

spannungskurve τ_y gleich dem des schraffierten Teils der Kurve τ_x. Auch für jeden anderen durch P gelegten Axialschnitt muß sich aus dem Inhalt der von P bis zu dem einen oder dem anderen Randpunkte reichenden Stück der zugehörigen Schubspannungsfläche dieselbe Schubkraft s parallel zur Stabachse ergeben. Diese Kraft s ist also für jeden Querschnittspunkt eine bei gegebenem Drehmoment fest bestimmte Größe, die durch Integration der in einer vom Querschnittspunkte zu einem beliebigen Randpunkte gezogenen Schnittlinie senkrecht zur Querschnittsfläche wirkenden elementaren Schubkräfte gefunden wird. Sie kann durch eine Ordinate im Punkte P senkrecht zur Querschnittsfläche dargestellt werden; die Endpunkte aller derartiger Ordinaten bestimmen eine auf dem Rande des Querschnitts aufsitzende räumliche Fläche, die weiterhin die **Schubkraftfläche** genannt werden wird.

Abb. 1.

Da die Ordinaten der Schubkraftfläche durch Integration der Schubspannungsflächen gefunden werden, so folgt ohne weiteres, daß die axialen Schubspannungen aus der Schubkraftfläche durch Differentiation hervorgehen, die Spannung in einem Querschnittspunkte P und dem Schnitte $A A_1$, also ihrer Größe nach durch die trigonometrische Tangente $\operatorname{tang} \alpha = \frac{\partial s}{\partial x}$ des Neigungswinkels der in der Schnittfläche $A A_1$ im Punkte P_1 an die Schubkraftfläche gelegten Berührungslinie bestimmt ist. Um die relative Richtung der Schubspannungen zu bestimmen, werde festgesetzt, daß bei der Betrachtung von außen her eines bestimmten Teilstücks zur Beurteilung des Vorzeichens von $\frac{\partial s}{\partial x}$ die positive Richtung der Abszissenachse von dem Eckpunkte P des Teilstücks aus nach rechts zeige. Es ergibt sich dann ohne weiteres, daß in demselben Punkte P zweier durch einen Schnitt getrennter Hälften gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Spannungen herrschen. Horizontale Tangenten bezeichnen die Richtungen derjenigen axialen Schnitte, in denen die Schubspannungen im Berührungspunkte verschwinden; senkrecht zu ihnen in der Neigungsrichtung der Tangentialebene tritt der Höchstwert der Schubspannung im Berührungspunkte auf. Nur im Berührungspunkte einer wagerechten Tangentialebene ist der Wert der Spannungskomponente nach allen Richtungen hin Null. Am Rande des Stabquerschnitts sind die horizontalen Tangenten an der Schubkraftfläche gleichzeitig auch Tangenten der Randlinie; daraus folgt, daß am Rande des Stabquerschnitts die Höchstwerte der axialen Schubspannungen in den senkrecht zur Staboberfläche gericheten Längsschnitten auftreten.

2. Das Drehmoment. Die axialen Schubspannungen sind gleich den senkrecht zu dem zugehörigen Schnitt gerichteten Schubspannungskomponenten im Stabquerschnitt. Am Rande und ebenso in jeder durch einen horizontalen Schnitt der Schubkraftfläche erhaltenen inneren Kurve des Stabquerschnitts sind daher die Schubspannungen tangential gerichtet; normal zu diesen »Randlinien« treten keine Spannungen auf. Die Projektionen zweier im Abstande ds voneinander durch die Schubkraftfläche gelegter wagerechter Schnitte ergeben zwei benachbarte Randlinien auf dem Querschnitte, deren senkrechte Abstände voneinander mit dn bezeichnet werden. Die Umfangselemente du der äußeren Randlinie bilden mit den begrenzenden Normalabständen Flächenelemente von der Größe

$$df = du \cdot dn;$$

in ihnen treten tangentiale Schubkräfte $\tau \cdot df$ auf, deren Drehmoment in bezug auf einen beliebigen Querschnittspunkt O nach Abb. 2

$$dm = \tau \cdot df \cdot h = \tau \cdot du \cdot dn \cdot h$$

ist. Da nun $\tau = \frac{ds}{dn}$, ist auch $dm = ds \cdot du \cdot h$. Hierin bedeutet $du \cdot h$ den doppelten Flächeninhalt des zu du gehörigen Elementardreiecks mit der Spitze O; die Summation aller von dem Ringstreifen zwischen den beiden Randlinien aufgenommenen Drehmomente ergibt daher, da ds konstant ist:

$$dM = \int ds \cdot du \cdot h = 2\, ds \cdot F,$$

worin F den Flächeninhalt des von der äußeren Randlinie umgrenzten Schnittes durch die Schubkraftfläche und $ds \cdot F$ den Körperinhalt zwischen den beiden wagerechten Schnitten der Schubkraftfläche darstellt. Die Zerlegung des gesamten Querschnitts in lauter nahe beieinander liegende Randlinien und die folgende Summation aller auf den Punkt O bezogener Einzelmomente führt sodann auf die einfache Beziehung

$$M = 2\, V,$$

worin M das auf den Stab wirkende Drehmoment und V der doppelte Inhalt des zwischen dem Querschnitt und der aufgesetzten Schubkraftfläche liegenden Raumes ist. Da der Punkt O ganz beliebig gewählt war, so ist das Drehmoment unabhängig von der gewählten Drehachse, es handelt sich also um ein reines Moment.

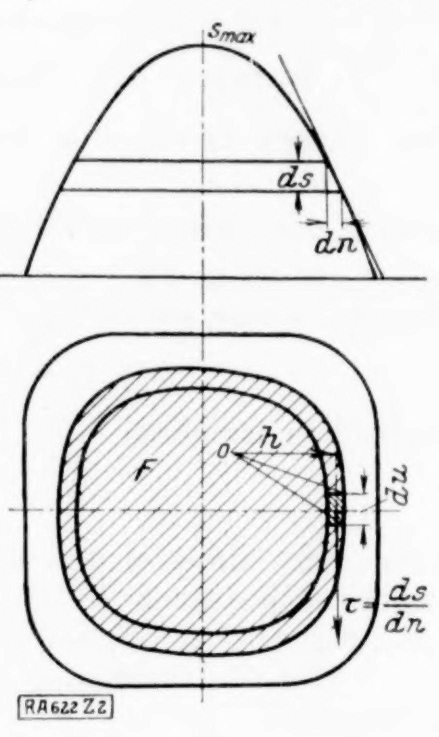


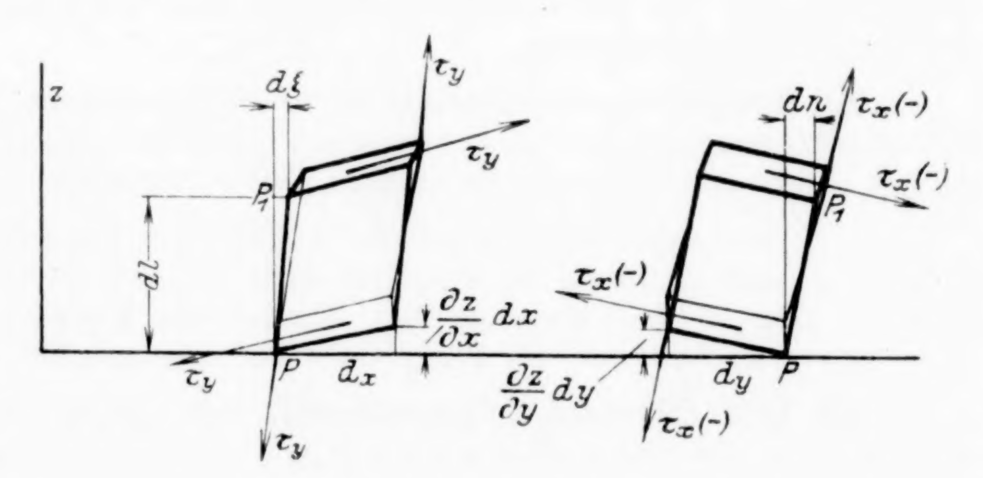
Abb. 2.

3. Bildungsgesetz der Schubkraftfläche. Zur Bestimmung des Bildungsgesetzes der Schubkraftfläche muß auf die bei der Drehung eintretenden Formänderungen eingegangen werden. Diese bestehen in der Hauptsache aus der schraubenförmigen Windung der ursprünglich geraden Längsfasern und aus der Aufwölbung der ursprünglich ebenen Querschnittsflächen des Stabes. Sonstige Formänderungen der Querschnitte brauchen zunächst nicht vorausgesetzt zu werden.

In Abb. 3 werde vom Punkte P des Stabquerschnitts aus in der als X-Y-Ebene gewählten Querschnittsfläche des Stabes durch Abtragung der positiven Strecken dx und dy ein Flächenelement

$$df = dx \cdot dy$$

gebildet und über diesem das axiale Prisma von der Länge dl errichtet. Die in der Deckfläche wirkenden Schubspannungskomponenten τ_x und τ_y werden als positiv angenommen, wenn sie in der Richtung der positiven X- und Y-Achse wirken. Es folgt dann, daß die in P zusammenstoßenden Seitenflächen Schubspannungen aufnehmen, welche als positiv zu bezeichnen sind, wenn sie nach unten gerichtet sind. Die Größe der Schubspannungen ist proportional der Aenderung der ursprünglich rechtwinkligen Körperwinkel des Prismas; bedeutet z die Wölbungsordinate des deformierten Querschnitts, $d\xi$ und $d\eta$ die Verschiebungen des anfänglich senkrecht über P liegenden



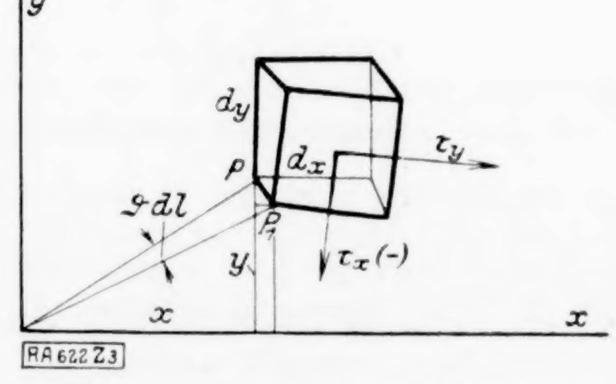


Abb. 3.

Eckpunktes P^1 der Deckfläche, so ist in Anbetracht der Kleinheit der Verschiebungen

$$\tau_x = G\left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{d\eta}{dl}\right), \qquad \tau_y = G\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{d\xi}{dl}\right),$$

worin G der Schubmodul des Materials ist.

Es sei eine Rechtsdrehung vorhanden, deren Größe für die Längeneinheit des Stabes $\vartheta \cdot \frac{180^0}{\pi}$ betrage. Die Drehachse befinde sich in O; ihr Abstand von P und P_1 sei r. Der lineare Betrag der Verschiebung des Punktes P hat dann den Wert

$$PP_1 = r \cdot dl \cdot \vartheta,$$

woraus die Seitenverschiebungen zu

$$d\xi = y \cdot \vartheta \cdot dl, \qquad d\eta = -x \cdot \vartheta\, dl$$

folgen. Somit ist

$$\tau_x = G\left(\frac{\partial z}{\partial y} - x \cdot \vartheta\right), \qquad \tau_y = G\left(\frac{\partial z}{\partial x} + y\vartheta\right)$$

Außerdem ist aber

$$\tau_x = \frac{\partial s}{\partial x}, \qquad \tau_y = -\frac{\partial s}{\partial y},$$

wobei das Minuszeichen des Ausdrucks für τ_y aus der Ueberlegung folgt, daß bei rechts zeigender positiver Y-Achse die durch P gehende der Y-Achse parallele Seitenfläche auf der Rückseite des Prisma liegt, also nicht von außen, sondern von innen betrachtet wird.

Die Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für τ_x sowohl wie für τ_y liefert die Beziehungen

$$\frac{\partial s}{\partial x} = G\left(\frac{\partial z}{\partial y} - x\vartheta\right), \qquad \frac{\partial s}{\partial y} = -G\left(\frac{\partial z}{\partial x} + y\vartheta\right).$$

Hieraus folgt durch partielle Differentiation der ersten Gleichung nach x und der zweiten Gleichung nach y nach folgender Addition:

$$\underline{\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = -2G\vartheta.}$$

Wird umgekehrt die erste Gleichung nach y und die zweite nach x differentiiert, so ergibt sich nach Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung

$$\underline{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.}$$

Hierdurch sind die Differentialgleichungen der Schubkraftfläche und der Wölbungsfläche des Querschnitts bestimmt.

4. Beispiele. Die Spannungsverteilung und die Abhängigkeit des Drehmoments vom Verdrehungswinkel sind für einen geraden prismatischen Stab bekannt, sobald es gelingt, über seinem Querschnitt eine Fläche zu wölben, welche dem Bildungsgesetze

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = -2G\vartheta$$

genügt. Das ist bei einer ganzen Klasse von Kurven, die hier in ihrer Allgemeinheit nicht näher zu behandeln[1]) sind, ohne weiteres möglich, z. B. bei der Ellipse.

a) Der elliptische Querschnitt. Die große Achse der Ellipse sei h, die kleine b. Dann ist die Gleichung der Ellipse

$$\frac{4x^2}{h^2} + \frac{4y^2}{b^2} = 1$$

oder

$$4x^2b^2 + 4y^2h^2 - h^2b^2 = 0.$$

Die Flächengleichung

$$s = c\,(4x^2b^2 + 4y^2h^2 - h^2b^2)$$

---

[1]) Setzt man die Funktion der komplexen Variabeln $f(x+iy) = u + iv$, so ist

$$s = G\vartheta\left(-\frac{x^2+y^2}{2} + au + bv\right)$$

die allgemeine Form der Gleichung der Schubkraftfläche, worin a und b beliebige Konstanten sind. Die Gleichung des deformierten Stabquerschnitts ist dann

$$z = av - bu.$$

liefert für $s = 0$ als Randlinie die gegebene Ellipse; ferner ist

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = 8c(h^2 + b^2).$$

Für

$$c = -\frac{G\vartheta}{4(h+b)^2}$$

geht diese Differentialgleichung über in die verlangte:

$$\frac{\partial^2 s}{d x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = -2G\vartheta.$$

Daher ist

$$s = \frac{G\vartheta}{4(h^2+b^2)}(h^2 b^2 - 4b^2 x^2 - 4h^2 y^2)$$

die Gleichung der Schubkraftfläche für den elliptischen Querschnitt; sie stellt ein Paraboloid dar. Da ihre größte Ordinate für $x = 0$ und $y = 0$

$$s_{\max} = G\vartheta \frac{h^2 b^2}{4(h^2+b^2)}$$

ist, so ergibt sich der Rauminhalt zu

$$J = {}^1/_2 F \cdot s_{\max} = \pi \cdot \frac{h^3 b^3}{32(h^2+b^2)} G\vartheta$$

und das Drehmoment zu

$$\underline{M = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{h^3 b^3}{h^2+b^2} \cdot G\vartheta.}$$

Die Schubspannungskomponenten sind senkrecht zur X-Achse

$$\tau_x + \frac{\partial s}{\partial x} = -2x \cdot \frac{b^2}{h^2+b^2} G\vartheta,$$

senkrecht zur Y-Achse

$$\tau_y = -\frac{\partial s}{\partial y} = 2y \cdot \frac{h^2}{h^2+b^2} G\vartheta,$$

woraus

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = 2G\vartheta\sqrt{x^2 b^4 + y^2 h^4}$$

folgt. Ueber die Vorzeichen ist oben gesprochen worden. Die beiden Hauptspannungen ergeben sich zu

$$\tau_h = -\frac{hb^2}{h^2+b^2} G\vartheta$$

am Ende der Achse h und zu

$$\tau_b = \frac{h^2 b}{h^2+b^2} G\vartheta$$

am Ende der Achse b. Durch M ausgedrückt wird unter Fortlassung des Vorzeichens

$$\tau_h = \frac{16 M_d}{\pi h^2 b}; \qquad \tau_b = \frac{16 M_d}{\pi h b^2}.$$

Die Ableitung dieser bekannten Formeln zeigt die Einfachheit des Verfahrens.

Auch die Gleichung des deformierten Stabquerschnitts ist leicht zu finden. Da

$$\tau_x = G\left(\frac{\partial z}{\partial y} - x\vartheta\right), \qquad \tau_y = G\left(\frac{\partial z}{\partial x} + y\vartheta\right),$$

so ist

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{h^2 - b^2}{h^2+b^2}\vartheta; \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{h^2 - b^2}{h^2+b^2}\vartheta,$$

und somit

$$z = x \cdot y \cdot \frac{h^2 - b^2}{h^2+b^2}\vartheta.$$

Dies ist ein einschaliges Hyperboloid, das für $h = b$ (Kreisquerschnitt) zur Ebene wird. Abb. 4 stellt die Schubkraftfläche, die Spannungsverteilung und die Wölbungsfläche des Querschnitts für $\frac{h}{b} = 2$ dar.

b) Das gleichseitige Dreieck, dessen eine Symmetrieachse als X-Achse benutzt wird, und dessen Schwerpunkt im Koordinatenursprung liegt, ist durch die Gleichung bestimmt

$$a^3\sqrt{3} - 9a \cdot \sqrt{3} \cdot x^2 - 9a\sqrt{3}\,y^2 - 18x^3 + 54xy^2 = 0,$$

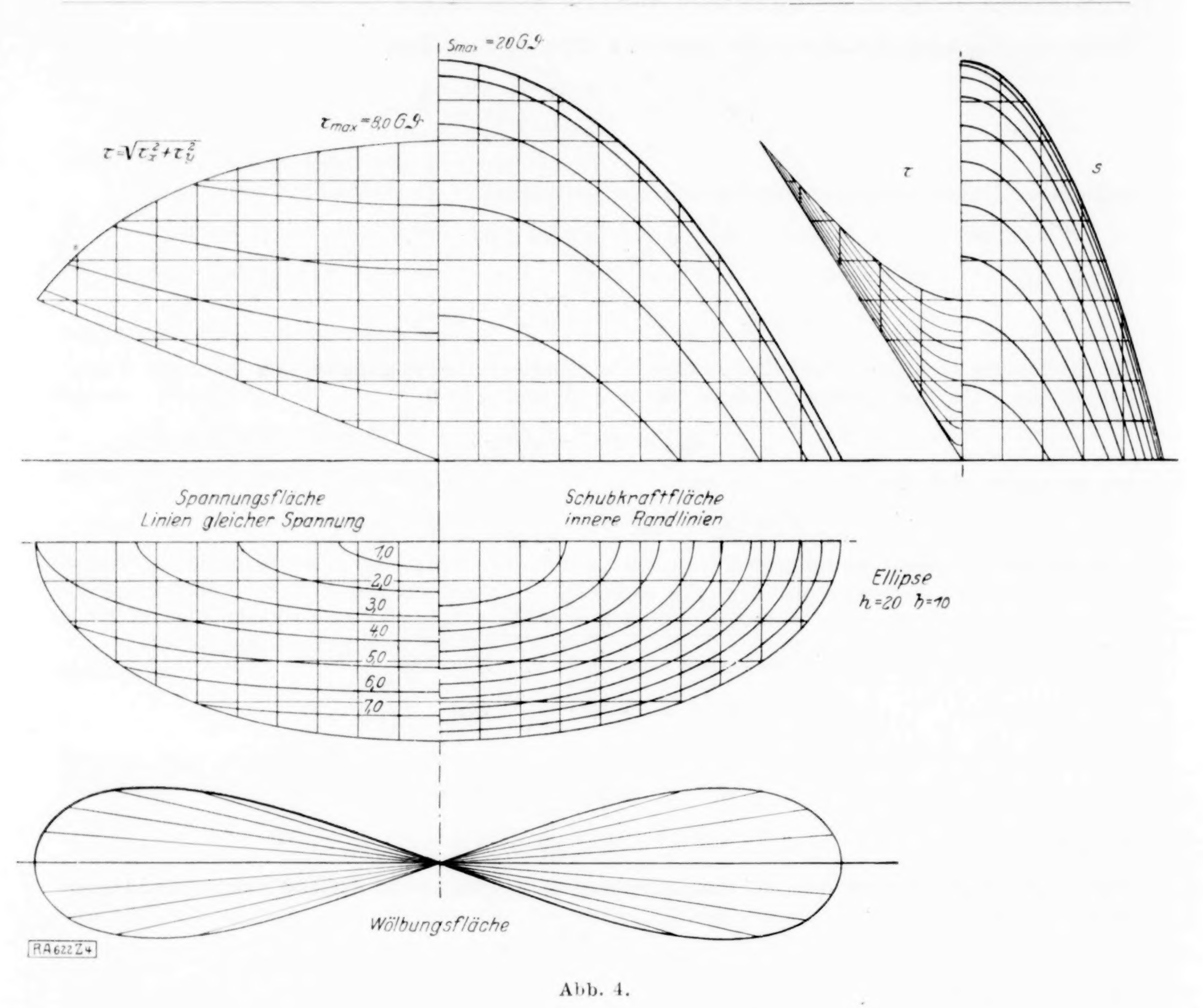


Abb. 4.

worin a die Seitenlänge bedeutet. Setzt man

$$s = c\,(a\sqrt[3]{3} - 9a\cdot\sqrt{3}\cdot x^2 - 9a\sqrt{3}\cdot y^2 - 18x^3 + 54xy^2),$$

so ist

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = c\,(-18a\sqrt{3} - 108x); \qquad \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = c\,(-18a\sqrt{3} + 108x);$$

mithin

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = -36a\sqrt{3}\cdot c.$$

Wenn

$$c = \frac{\vartheta G}{18a\sqrt{3}}$$

gesetzt wird, so geht diese Gleichung über in

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = -2G\vartheta,$$

und hieraus folgt, daß

$$s = \vartheta G\cdot a^2\left(\frac{1}{18} - \frac{x^2+y^2}{2a^2} - \frac{x^3 - 3xy^2}{\sqrt{3}\cdot a^3}\right.$$

Die Gleichung der Schubkraftfläche für das gleichseitige Dreieck ist. Es ist ferner

$$\tau_x = \frac{\partial s}{\partial x} = -\vartheta\cdot G\cdot a\left(\frac{x}{a} + \sqrt{3}\,\frac{x^2-y^2}{a^2}\right); \qquad \tau_y = -\frac{\partial s}{\partial y} = \vartheta\cdot G\cdot y\left(1 - 2\sqrt{3}\,\frac{x}{a}\right).$$

An den drei Eckpunkten werden sowohl τ_x wie τ_y, also auch die resultierenden Spannungen zu Null. Der Spannungsverlauf längs einer Dreieckseite ergibt sich aus den Spannungsgleichungen für $X = \frac{a}{b}\sqrt{3}$; es ist unter Fortlassung des Vorzeichens:

$$\tau_y = 0; \qquad \tau_x = \tau = \vartheta \cdot G \cdot a \cdot \sqrt{3}\left(\tfrac{1}{4} - \frac{y^2}{a^2}\right);$$

Die Spannungskurve hat also parabolischen Verlauf und weist in der Mitte der Seite einen Höchstwert von der Größe

$$\underline{\tau_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \vartheta \cdot G \cdot a}$$

auf. Das Drehmoment ist

$$\underline{M = 2\iint s \cdot dx \cdot dy = \frac{a^4 \cdot \sqrt{3}}{80} \cdot G \cdot \vartheta,}$$

und demnach

$$\underline{\tau_{\max} = \frac{20\,M}{a^3}}$$

Die Wölbungsfläche des Stabquerschnitts wird durch die Gleichung

$$z = -\vartheta\sqrt{3} \cdot \frac{y}{a}\left(x^2 \cdot \frac{y^2}{3}\right)$$

bestimmt.

c) Das Rechteck. Die Gleichung des Rechtecks mit den Seiten h und b ist

$$\frac{h^2\,b_2}{4} - x^2 b^2 - y^2 h^2 + 4\,x^2 y^2 = 0.$$

Die Annahme

$$z = c\left(\frac{h^2\,b^2}{4} - x^2 b^2 - y^2 h^2 + 4\,x^2 y^2\right)$$

liefert

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\,c\,(b^2 + h^2 - 4\,x^2 - 4\,y^2),$$

und es ist daher nicht möglich, auf diese Weise der Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\,G\,\vartheta$$

zu genügen. Indessen kann der Ausdruck für z in erster Annäherung als die Gleichung der Schubkraftfläche angesehen werden, wobei die Wahl des Faktors c einstweilen ausgesetzt bleiben möge. Es wird

$$\tau_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -2\,c\,x\,(b^2 - 4\,y^2); \qquad \tau_y = -\frac{\partial z}{\partial y} = 2\,c\,y\,(h^2 - 4\,x^2)$$

$$M = 2\iint z \cdot dx \cdot dy = \frac{2}{9}\,c\,h^3\,b^3.$$

Die größte Spannung liegt in der Mitte der längeren Seite h, wo $x = 0$ und $y = \frac{b}{2}$ zu setzen ist; es wird

$$\tau_x = 0, \qquad \tau_y = \tau_{\max} = c\,h^2\,b$$

und daher

$$\underline{\tau_{\max} = \frac{9}{2} \cdot \frac{M}{b\,h^2}}.$$

Diese allgemein gebräuchliche Näherungsformel gilt also für jede Annahme von c, dessen Wert lediglich auf die Abhängigkeit des Verdrehungswinkels vom Momente von Einfluß ist. Soll die Beziehung

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = -2\,G\,\vartheta$$

in der Drehachse genau erfüllt sein, so ist

$$c = 1{,}00\,\frac{G\,\vartheta}{h^2 + b^2} \quad \text{und} \quad M = \frac{G\,\vartheta}{4{,}5} \cdot \frac{h^3\,b^3}{h^2 + b^2}$$

zu setzen. Dagegen liefert die Forderung, daß der Mittelwert des Ausdrucks $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}$ gleich $-2\,G\,\vartheta$ sein soll, den Wert

$$c = 1{,}50\,\frac{G\,\vartheta}{h^2 + b^2}, \quad \text{und daraus} \quad M = \frac{G\,\vartheta}{3{,}0} \cdot \frac{h^3\,b^3}{h^2 + b^2}.$$

In der Technik ist ein zwischen beiden Extremen liegender mittlerer Wert von c gebräuchlich, der sich aus

$$M = \frac{G\vartheta}{3{,}6} \cdot \frac{h^3 b^3}{h^2 + b^2} \quad \text{zu} \quad c = 1{,}25 \frac{G\vartheta}{h^2 + b^2}$$

bestimmt.

Zur genauen Ermittlung der Drehspannungen in Stäben mit rechteckigem Querschnitt muß auf die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = -2 G \vartheta$$

näher eingegangen werden. Sie besagt, daß ein über dem Stabquerschnitt errichteter Zylinder von der Höhe $2 G \vartheta$ durch eine Fläche so in zwei Teile zerlegt werden soll, daß der eine, etwa der untere, die Werte von $\frac{\partial^2 s}{D x^2}$ und der andere die Werte von $\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}$ als Ordinaten enthält. Die Gleichung dieser Fläche sei dargestellt durch

$$\zeta = -\frac{\partial^2 s}{\partial x^2};$$

dann ist

$$2 G \vartheta - \zeta = -\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}.$$

Durch zweimalige partielle Differentiation der ersten Gleichung nach y und der zweiten Gleichung nach x wird die Beziehung

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = c$$

erhalten.

Beim Rechteck ist unter der Voraussetzung, daß die Seiten den Koordinatenachsen parallel laufen, längs des einen Seitenpaares

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0$$

und längs des anderen Seitenpaares

$$\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = 0,$$

da s am Querschnittsrande konstant gleich Null ist. Daraus folgt, daß sich die Fläche ζ in dem über dem rechteckigen Querschnitt errichteten Prisma von der Höhe $2 G \vartheta$ dergestalt sattelförmig ausspannt, daß sie an der Grundfläche dem einen und an der Deckfläche dem anderen parallelen Seitenpaar anhaftet. Ist h die Länge der der X-Achse parallelen und b die Länge der der Y-Achse parallelen Seiten, so ist also

$$\zeta = c \text{ für } y = \pm \frac{b}{2}; \qquad \zeta = 2 G \vartheta \text{ für } x = \pm \frac{h}{2}.$$

Körperlich läßt sich die Fläche durch Abheben eines Oberflächenhäutchens aus Seifenwasser mittels eines Drahtbügels von der in Abb. 5 dargestellten Form erhalten.

Abb. 5.

Um zu einer möglichst einfachen Gestalt des mathematischen Ausdrucks für ζ zu gelangen, werde das Koordinatensystem so verschoben, daß der Nullpunkt in eine Ecke des Rechtecks fällt. Die Differentialgleichung bleibt ungeändert

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = c;$$

dagegen wird

$$\zeta = 0 \text{ für } y = 0 \text{ und } y = b; \qquad \zeta = 2 G \vartheta \text{ für } x = 0 \text{ und } x = h.$$

Diesen Bedingungen genügt die Doppelreihe

$$\zeta = \frac{4 G \vartheta}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \pm \operatorname{atg} \frac{y + nb}{x + mh},$$

deren Glieder positive Vorzeichen für gerade und negative Vorzeichen für ungerade Werte von $m + n$ besitzen, und die außerdem im ersten Quadranten liegen.

In der Tat ist

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \operatorname{atg} \frac{y+nb}{x+mh} = 2\,\frac{(x+mh)(y+nb)}{[(x+mh)^2+(y+nb)^2]^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \operatorname{atg} \frac{y+nb}{x+mh} = -\,2\,\frac{(x+mh)(y+nb)}{[(x+mh)^2+(y+nb)^2]^2},$$

und daher

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0.$$

Für $y = 0$ heben sich die Glieder $a\,t\,g\,\frac{y+nb}{+mh}$ und $a\,t\,g\,\frac{y+nb}{-mh}$ auf; nur das eine Glied für $m = 0$ und $n = 0$ bleibt bestehen, und es ist

$$\zeta = \frac{4\,G\,\vartheta}{\pi} \cdot \operatorname{atg} \infty = 2\,G\,\vartheta.$$

Das Gleiche ist für $x = h,\ 2\,h \ldots.$ der Fall; nur wird das verbleibende Restglied jetzt aus $n = 0$ und $m = -1,\ -2 \ldots$ erhalten.

Für $y = 0$ wird $\zeta = 0$, da sowohl die Glieder $a\,t\,g\,\frac{+nb}{x+mh}$ und $a\,t\,g\,\frac{-nb}{x+mh}$ einander aufheben, wie auch das Glied für $n = 0$ verschwindet. Für $y = b,\ 2\,b \ldots$ treten dieselben Verhältnisse bei $n = 1,\ -2 \ldots$ auf. Die Bedingungen sind also erfüllt.

Setzt man

$$\frac{x+mh}{b} = \xi, \qquad \frac{y}{b} = \eta,$$

so wird

$$\zeta = \frac{4\,G\,\vartheta}{\pi} \sum \sum \pm \operatorname{atg} \frac{\eta+n}{\xi},$$

worin n wie vorher von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst und ξ der Reihe nach die Werte beizulegen sind, die für die Zahlenreihe von $m = -\infty$ bis $m = +\infty$ aus der Definitionsgleichung folgen. Die für einen bestimmten Wert von ξ sich ergebende Reihe sei

$$\zeta_\xi = \frac{4\,G\,\vartheta}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \pm \operatorname{atg} \frac{\eta+n}{\xi};$$

sie stellt eine Funktion von η und ξ dar, die rechnerisch ermittelt und in Tabellenform dargestellt werden kann. Ist das geschehen, so hat man

$$\zeta = \sum \pm \zeta_\xi$$

zu bilden, wobei in die Summe alle aus

$$\xi = \frac{x+mh}{b}$$

für $m = -\infty$ bis $m = +\infty$ folgenden Werte von ζ_ξ einzusetzen sind. Die Tabelle braucht nur die positiven Werte von ξ zu berücksichtigen, da ein Vorzeichenwechsel von ξ lediglich einen Vorzeichenwechsel von ζ_ξ bewirkt. Berücksichtigt man dies, so nimmt die Reihe für ζ folgende Gestalt an:

$$\zeta = \zeta_{\frac{x}{b}} + \zeta_{\frac{h-x}{b}} - \zeta_{\frac{h+x}{b}} - \zeta_{\frac{2h-x}{b}} + \zeta_{\frac{2h+x}{b}} + \zeta_{\frac{3h-x}{b}} - \ldots.$$

Sie konvergiert für $h \geqq b$ außerordentlich schnell.

Folgende Tabelle enthält die Werte von ζ_ξ als Funktion von ξ und η; sie wurde berechnet, nachdem der Reihe ζ_ξ durch Zusammenziehung je zweier Glieder mittels der Transformation

$$\operatorname{atg} \frac{\eta+n}{\xi} + \operatorname{atg} \frac{\eta-n}{\xi} = \operatorname{atg} \frac{2\,\xi\,\eta}{n^2+\xi^2-\eta^2}$$

die Form gegeben war:

$$\zeta_\xi = \frac{4\,G\,\vartheta}{\pi} \left(\operatorname{atg} \frac{\eta}{\xi} - \operatorname{atg} \frac{2\,\xi\,\eta}{1+\xi^2-\eta^2} + \operatorname{atg} \frac{2\,\xi\,\eta}{4+\xi^2-\eta^2} - \operatorname{atg} \frac{2\,\xi\,\eta}{9+\xi^2-\eta^2} + \ldots. \right).$$

Um beispielsweise bei einem Rechteck von dem Seitenverhältnis $\frac{h}{b} = 1{,}5$ die Fläche ζ zu bestimmen, denke man sich die Ebene durch Horizontalen im Abstande b und durch Vertikalen im Abstande $h = 1{,}5\,b$ in Rechtecke eingeteilt. Von diesen wird dann eins herausgegriffen und in Quadrate von der Seitenlänge $\frac{b}{10}$ zerlegt; außerdem werden die

Werte des Koeffizienten c in der Gleichung $\zeta_\xi = c \cdot G\vartheta$.

ξ_m	$\eta = 0,0$ $u \cdot 1,0$	$\eta = 0,05$ $u \cdot 0,95$	$\eta = 0,1$ $u \cdot 0,9$	$\eta = 0,2$ $u \cdot 0,8$	$\eta = 0,3$ $u \cdot 0,7$	$\eta = 0,4$ $u \cdot 0,6$	$\eta = 0,5$
0,00	2,000	2,000	2,000	2,000	2 000	2,000	2,000
0,05	0,000	0,995	1,399	1,666	1,755	1,791	1,801
0,10	«	0,580	0,979	1,366	1.521	1.586	1.606
0,20	«	0,292	0,550	0,916	1,119	1,218	1,248
0,30	«	0,182	0,352	0 634	0,814	0,914	0.946
0,40	«	0.123	0.241	0,445	0,591	0,678	0,706
0,45	«	0.101	0,201	0,376	0,504	0,583	0,607
0,50	«	0,086	0,170	0.318	0,430	0,499	0.522
0,55	«	0,071	0,144	0,270	0,366	0,426	0,447
0,60	«	0,061	0,122	0,230	0,313	0.366	0,383
0,70	«	0,044	0,088	0,167	0.229	0,268	0.282
0,80	«	0,032	0,064	0,123	0.168	0,196	0,206
0,90	«	0,023	0,046	0,090	0.123	0.143	0.150
0,95	«	0,020	0,040	0,077	0,105	0,122	0,128
1,00	«	0,017	0,034	0.065	0,089	0,105	0,110
1,05	«	0,014	0,028	0,055	0,076	0,090	0,094
1,10	«	0,012	0,024	0,047	0,065	0.076	0,080
1,20	«	0,009	0,018	0,035	0,048	0,056	0,059
1,30	«	0,007	0,013	0,025	0,035	0,041	0,043
1,40	«	0.005	0,010	0.019	0,026	0,030	0,032
1,45	«	0,004	0,008	0,016	0,022	0.026	0,027
1,50	«	0,003	0,007	0,013	0,019	0,022	0,023
1,55	«	0,003	0,006	0,011	0,016	0.019	0.020
1,60	«	0,002	0.005	0,010	0.014	0,016	0,017
1,70	«	0,002	0.004	0,008	0.011	0.012	0.013
1,80	«	0,001	0,003	0.006	0.008	0,009	0,010
1,90	«	0,001	0,002	0,004	0,006	0,007	0,007
1,95	«	0,001	0,002	0.003	0,005	0,006	0,006
2,00	«	0,001	0,002	0.003	0,004	0,005	0,005
2,05	«	0,001	0.002	0,003	0.004	0,005	0,005
2,10	«	0,001	0,001	0,002	0,003	0,004	0,004
2,20	«	0,000	0,001	0,002	0,002	0,003	0.003
2,30	«	«	0,001	0,001	0,002	0,002	0.002
2,40	«	«	0,001	0,001	0.001	0.001	0.001
2,45	«	«	0,001	0,001	0.001	0,001	0.001
2,50	«	«	0.000	0,001	0.001	0,001	0.001
2,55	«	«	«	0,001	0,001	0,001	0,001
2.60	«	«	«	0,000	0.001	0,001	0.001
2.70	«	«	«	«	0,000	0.001	0.001
2,80	«	«	«	«	«	0,000	0,000

rechts und links von diesem Rechteck liegenden Vertikalen abwechselnd mit — und + bezeichnet; beide vertikale Rechteckseiten erhalten das Vorzeichen +. Ein Eckpunkt des Rechtecks dient als Ausgangspunkt für die Zählung der Werte von η und ξ. Die erste innere vertikale Teillinie im Rechteck hat von der einen Rechteckseite den Abstand $\xi_1 = 0,1$, von der anderen den Abstand $\xi_1' = 1,4$; von den nächsten Vertikalen sind die Abstände $\xi_2 = 1,6$ und $\xi_2' = 2,9$; dann folgen $\xi_3 = 3,1$ und $\xi_3' = 4,4$ usw. Demnach sind die Werte von ζ in jedem Teilpunkt der Teillinie durch folgende Summen bestimmt:

	$\eta = 0$ $u \cdot 1.0$	$0,05\,u \cdot 0,95$	$0,1\,u \cdot 0,9$	$0.2\,u \cdot 0.8$	$0.3\,u \cdot 0,7$	$0,4\,u \cdot 0,6$	0,5
$\xi_1 = 0,1$	+ 0.000	+ 0,580	+ 0.979	+ 1,366	+ 1,521	+ 1,586	+ 1.606
$\xi_1' = 1.4$	+ «	+ 0.005	+ 0.010	+ 0,019	+ 0,026	+ 0,030	+ 0,032
$\xi_2 = 1.6$	— «	— 0,002	— 0,005	— 0.010	— 0,014	— 0,016	— 0,017
$\xi_2' = 2.9$	— «	— 0.000	— 0.000	— 0,000	— 0.000	— 0,000	— 0,000
$-\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \zeta =$	$0,000\,G\vartheta$	$0,583\,G\vartheta$	$0,984\,G\vartheta$	$1,375\,G\vartheta$	$1,533\,G\vartheta$	$1,600\,G\vartheta$	$1,621\,G\vartheta$
$-\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = 2\,G\vartheta - \zeta =$	$2,000\,G\vartheta$	$1.417\,G\vartheta$	$1,016\,G\vartheta$	$0.625\,G\vartheta$	$0.467\,G\vartheta$	$0.400\,G\vartheta$	$0,379\,G\vartheta$

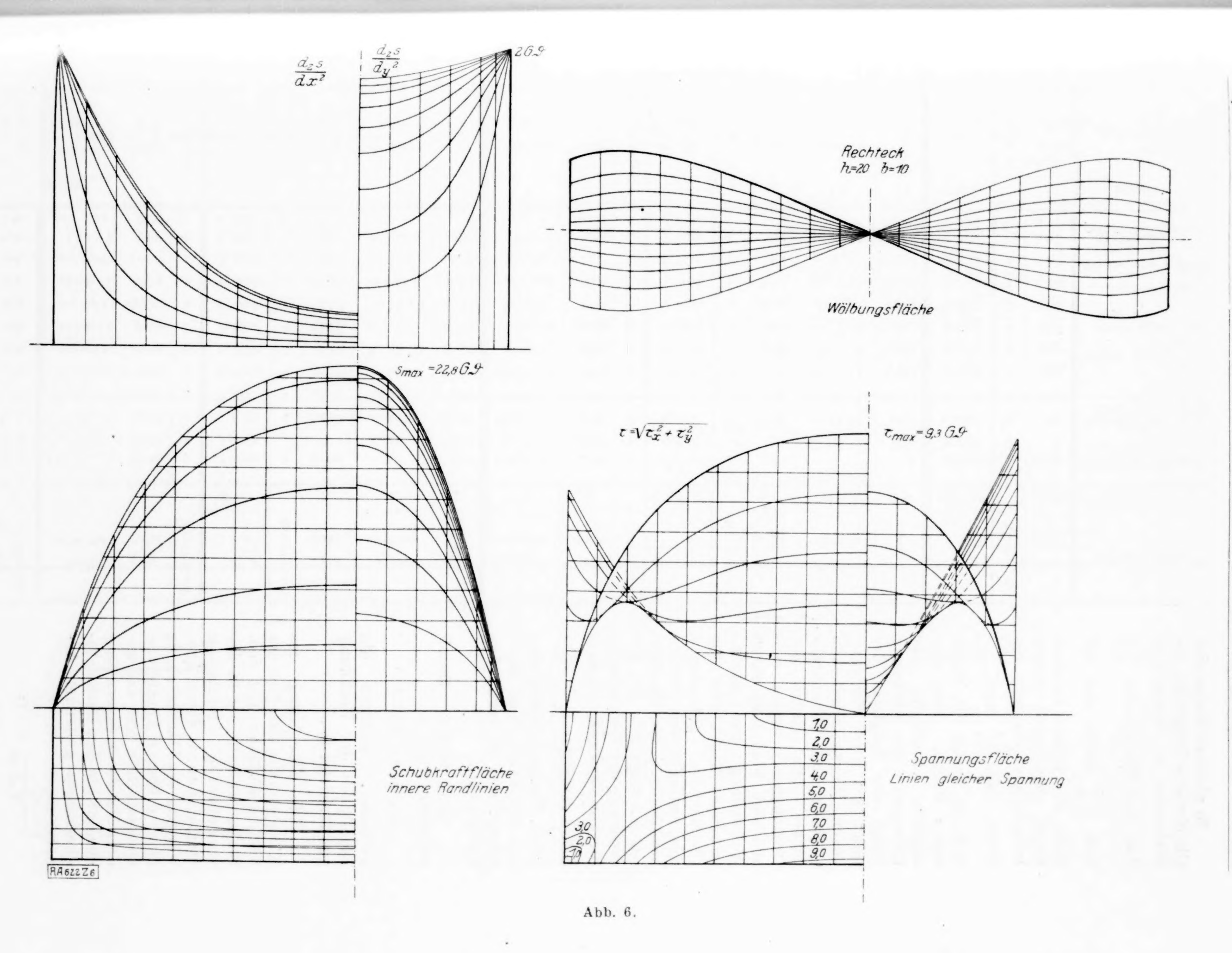

$\frac{d_2 s}{d x^2}$
$\frac{d_2 s}{d y^2}$
$2G\vartheta$
Rechteck
h=20 b=10
Wölbungsfläche
$s_{max} = 22{,}8\,G\vartheta$
$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$
$\tau_{max} = 9{,}3\,G\vartheta$
Schubkraftfläche
innere Randlinien
1,0 2,0 3,0 4,0 5,0 6,0 7,0 8,0 9,0
3,0 2,0 1,0
Spannungsfläche
Linien gleicher Spannung
RA622Z6

Abb. 6.

In gleicher Weise sind alle übrigen Teilpunkte des Rechtecks zu behandeln. Aus den Werten von $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}$ lassen sich mit Hilfe der Simpsonschen Regel oder durch andere Integrationsverfahren die Werte von $\frac{\partial s}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial s}{\partial y}$ und aus diesen die Werte von s finden. Eine vorzügliche Kontrolle der Richtigkeit der Rechnung bietet der Vergleich der somit auf zwei verschiedenen Wegen ermittelten Ordinaten der Schubkraftfläche. Die Größe des Drehmoments ergibt sich aus dem wiederum durch Anwendung der Simpsonschen Regel oder des Planimeters gefundenen Körperinhalt der Schubkraftfläche. Als Rechenschema folge hier die Berechnung der Mittelschnitte für ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis $\frac{h}{b} = 2$ (Abb. 6) unter Anwendung der Simpsonschen Regel (vergl. die nebenstehende Uebersicht).

Aus beiden Mittelschnitten wird

$$s_{max} = 0{,}228\ G\,\vartheta\,b^2$$

gefunden, wodurch die Richtigkeit der Rechnung gewährleistet ist.

Die Berechnung des Körperinhalts zwischen der Schubkraftfläche und dem Stabquerschnitt hat in der vorstehenden Rechnung einmal genau durch Auswertung des Flächeninhalts einer größeren Anzahl von Querschnitten und das andere Mal durch Anwendung der nur für den Rechtecksquerschnitt geltenden Annäherungsformel

$$\mathrm{Vol} = \frac{F_a \cdot F_b}{s_{max}}$$

Nr. der Ordinaten	Teil-summe	Pro-dukt	Koeffizient	$-\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$	Koeffizient	Pro-dukt	Teil-summe	Summe	Teil-summe	Pro-dukt	Koeffizient	$-\frac{\partial s}{\partial x}$	Koeffizient	Pro-dukt	Teil-summe	Summe	s	Koeffizient	Pro-dukt	Bemerkungen
1	2	3		$G \cdot \vartheta$		5	6	7	8	9		$G \cdot \vartheta \cdot b$		11	12	13	$G\,\vartheta\,b^2$		15	16
0,0	10817 : 6	2000	1	2,000	1	2000	—	7398	3880 : 6	740	1	0,740	1	740	—	0	0,000	$^1/_2$	0	Ordinatenabstand $d = 0{,}1\,b$
0,05	= 1803.	7208	4	1,802	—	—	9691 : 3	6448	= 647	2580	4	0,645	—	—	3397 : 3	346	0,035	2	70	
0,1	7586 : 3	1609	1	1,609	4	6436	= 3231	5595	2535 : 3	560	1	0,560	4	2240	= 1132	647	0,065	$^3/_2$	97	Halbparabel von Ordinate 0 bis 0,1
0,2	= 2528	5020	4	1,255	1	1255	5805 : 3	4167	= 845	1668	4	0,417	1	417	1868 : 3	1132	0,113	4	452	
0,3	4389 : 3	957	1	0,957	4	3828	= 1935	3067	1359 : 3	307	1	0,307	4	1228	= 623	1492	0,149	2	298	
0,4	= 1463	2888	4	0,722	1	722	3312 : 3	2232	= 453	892	4	0,223	1	223	976 : 3	1755	0,176	4	704	Werte von $\frac{\partial s}{\partial x}$
0,5	2524 : 3	544	1	0,544	4	2176	= 1104	1604	688 : 3	160	1	0,160	4	640	= 325	1945	0,195	2	390	übertragen aus
0,6	= 841	1656	4	0,414	1	414	1975 : 3	1128	= 229	452	4	0,113	1	113	464 : 3	2080	0,208	4	832	Spalte 7
0,7	1614 : 3	324	1	0,324	4	1296	= 659	763	287 : 3	76	1	0,076	4	304	= 155	2174	0,217	2	434	
0,8	= 538	1060	4	0,265	1	265	1405 : 3	469	= 96	188	4	0,074	1	47	139 : 3	2235	0,223	4	892	Werte von s übertragen aus
0,9	450 : 2	230	1	0,230	4	920	= 469	225	23 : 2	23	1	0,023	4	92	= 46	2270	0,227	$^5/_2$	567	Spalte 13
1,0	= 225	220	1	0,220	1	220	—	0	= 11	0	1	0,000	1	0	—	2281	0,228	$^3/_2$	342	

Mitte!

$\eta = 0{,}5$; Längsachse des Rechtecks

$$\tau_b = \frac{\partial s}{\partial r_{max}} = 0{,}740\ G\,\vartheta\,b$$

$$\frac{b^2 \cdot h}{b^2 + h^2} = 0{,}4\,b$$

$$\tau_b = 1{,}85\ G\,\vartheta\,\frac{b\,h^2}{b^2 + h^2}$$

Mitte!

$$\Sigma = 5{,}078$$

$$\frac{d}{3} = \frac{0{,}1\,b}{3}; \quad \text{Faktor } 2$$

$$F_b = 0{,}3385\ G\,\vartheta\,b^3$$

Nr. der Ordinaten	Teil-summe	Pro-dukt	Koeffizient	$-\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}$	Koeffizient	Pro-dukt	Teil-summe	Summe	Teil-summe	Pro-dukt	Koeffizient	$-\frac{\partial s}{\partial y}$	Koeffizient	Pro-dukt	Teil-summe	Summe	s	Koeffizient	Pro-dukt	Bemerkungen
1	2	3		$G \cdot \vartheta$		5	6	7	8	9		$G \cdot \vartheta \cdot b$		11	12	13	$G \vartheta b^2$		15	16
0,0	—	2000	1	2,000	1	2000	11796 : 6	9299	—	930	1	0,930	1	930	4987 : 6	0	0,000	$^1/_2$	0	Ordinatenabstand $d = 0{,}1\,b$
0,05	11598 : 3	—	—	1,966	4	7864	= 1966	8306	4405 : 3	—	—	0,831	4	3324	= 831	440	0,044	2	88	
0,1	= 3866	7728	4	1,932	1	1932	11234 : 3	7333	= 1468	2932	4	0,733	1	733	3264 : 3	831	0,083	$^3/_2$	125	Halbparabel von Ordinate 0 bis 0,1
0,2	10948 : 3	1870	1	1,870	4	7480	= 3745	5434	2158 : 3	543	1	0,543	4	2172	= 1088	1468	0,147	4	588	
0,3	= 3649	7288	4	1,822	1	1822	10762 : 3	3588	= 719	1436	4	0,359	1	359	1075 : 3	1919	0,192	2	384	
0,4	3570 : 2	1790	1	1,790	4	7160	= 3588	1785	179 : 2	179	1	0,179	4	716	= 358	2187	0,219	4	876	
0,5	= 1785	1780	1	1,780	1	1780	—	0	= 90	0	1	0,000	1	0	—	2277	0,228	1	228	

Mitte!

$\xi = 1$; Querachse des Rechtecks

$$\tau_a = \frac{\partial s}{\partial y_{max}} = 0{,}930\; G\,\vartheta\,b$$

$$\frac{b\,h^2}{b^2 + h^2} = 0{,}8\,b$$

$$\tau_a = 1{,}16\; G\,\vartheta\,\frac{b\,h^2}{b^2 + h^2}$$

Mitte!

$$\Sigma = 2{,}289$$

$$\frac{d}{3} = \frac{0{,}1\,b}{3}\,;\quad \text{Faktor } 2$$

$$F_b = 0{,}1519\; G\,\vartheta\,b^3$$

Körperinhalt der Schubkraftfläche angenähert $\frac{F_a \cdot F_b}{s_{max}} = 0{,}226\; G\,\vartheta\,b^4$; genau $0{,}229\; G\,\vartheta\,b^4$ (Faktor 1,013)

Rechteck $\frac{h}{b} = 2$

$\xi = 2$ $\xi = 1$ $\xi = 0$ $\eta = 0$ $\eta = 0{,}5$ $\eta = 1$

Moment $M = 2 \cdot 0{,}229 = 0{,}458\; G\,\vartheta\,b^4$

$$\frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2} = \frac{8}{5}\,b^4 = 1{,}60\,b^4$$

$$M = \frac{G\,\vartheta}{3{,}50}\,\frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2}$$

$$\tau_a = 4{,}06\,\frac{M}{b^2 h}$$

$$\tau_b = 6{,}47\,\frac{M}{b\,h^2}$$

stattgefunden. In der letzteren Formel bedeuten F_a und F_b die Flächeninhalte der beiden Hauptquerschnitte und s_{max} die Länge der größten Ordinate der Schubkraftfläche. Es zeigt sich hier wie auch bei anderen Verhältnissen von h zu b, daß die Näherungsformel ein um rund 1 vH zu kleines Ergebnis liefert, und daß das Volumen sonst für technische Zwecke ausreichend genau durch die Gleichung

$$\mathrm{Vol} = 1{,}01\,\frac{F_a \cdot F_b}{s_{max}}$$

bestimmt wird. Das obige Rechnungsschema genügt somit vollständig zur Ermittlung der Hauptspannungen und des Drehmoments.

Uebersteigt das Längenverhältnis $\frac{h}{b}$ den Wert 5, so sind bei gegebenem Drehwinkel ϑ die Werte der Spannungen τ_n und τ_b unabhängig von h und durch die Formeln

$$\tau_n = G \cdot \vartheta \cdot b; \qquad \tau_b = 0{,}75\, G\, \vartheta\, b$$

bestimmt. Die Schubkraftfläche erhält ein zylinderisches Mittelstück von parabelförmigem Querschnitt und liefert als Ausdruck für das Drehmoment den Wert

$$M = \left(1{,}464 + \frac{n-5}{3}\right) G\, \vartheta\, b^4,$$

worin n das Längenverhältnis $\frac{h}{b}$ bedeutet.

In der Technik werden folgende Formeln zur Darstellung der Abhängigkeit der Spannungen τ_b am Ende der Achse b und τ_h am Ende der Achse h, des Drehmomentes M und des Drehwinkels ϑ benutzt:

$$\tau_b = 4{,}5\,\frac{M}{b^2 h} = 1{,}25\, G\, \vartheta\, \frac{b\, h^2}{b^2 + h^2}; \qquad \tau_h' = 4{,}5\,\frac{M}{b\, h^2} = 1{,}25\, G\, \vartheta\, \frac{b^2\, h}{b^2 + h^2}; \qquad M = \frac{G\, \vartheta}{3{,}6}\,\frac{b^3\, h^3}{b^2 + h^2}.$$

In Wirklichkeit sind die Vorzahlen abhängig von dem Längenverhältnis $\frac{h}{b}$, wie aus folgender Tabelle zu ersehen ist:

$\frac{h}{b}$ n	$\tau_b =$ $c^1 \cdot \frac{M}{b^2 h}$ c_1 (4,50)	$\tau_b =$ $c^2\, G\, \vartheta\, \frac{b\, h^2}{b^2 + h^2}$ c_2 (1,25)	$\tau_h =$ $c^3 \cdot \frac{M}{b\, h^2}$ c_3 (4,50)	$\tau_h =$ $c^4\, G\, \vartheta\, \frac{b^2\, h}{b^2 + h^2}$ c_4 (1,25)	$M =$ $\frac{G\, \vartheta}{c^5} \cdot \frac{b^3\, h^3}{b^2 + h^2}$ c_5 (3,60)
1.0	4,81	1,35	4,81	1,35	3,56
1,5	4,32	1,22	5,56	1,57	3,54
2,0	4,06	1,16	6,47	1,85	3,50
2,5	3,84	1,11	7,44	2,15	3,46
3,0	3,72	1,09	8,45	2,48	3,41
3,5	3,60	1,07	9,44	2,80	3,37
4,0	3,53	1,06	10,52	3,16	3,33
4,5	3,48	1,05	11,62	3,51	3,31
5,0	3,42	1,04	12,72	3,87	3,29
5,5	3,37	1,03	13,79	4,22	3,27
6,0	3,32	1,02	14,92	4,59	3,25

Demnach geben die gebräuchlichen Näherungsformeln im allgemeinen zu große Werte für die Hauptspannung τ_b und viel zu kleine Wert für die in der Mitte der kleinen Seite wirkende Spannung τ_h. Unter gewöhnlichen Umständen ist das Technische nicht von großem Belang, kann aber von Wichtigkeit werden, wenn es sich wie bei der Berechnung von Kurbeln um die Zusammensetzung von Verdrehungs- und Biegungsspannungen handelt. Zum Schluß werde noch ein Stab mit kreuzförmigem Querschnitt kurz untersucht. Zur Ermittlung der Gleichung der Schubkraftfläche kann man sich der Reihenformel für Polarkoordinaten

$$s = G\, \vartheta \left(a_0 - \frac{r^2}{2} + a_1\, r^4 \cos 4\,\varphi + a_2\, r^8 \cos 8\,\varphi + a_3\, r^{12} \cos 12\,\varphi + \ldots\right)$$

bedienen, welche der für rechtwinklige Koordinaten entwickelten Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = -2\, G\, \vartheta$$

genügt, und in welcher die Vorzahlen $a_0, a_1 \ldots$ derart bestimmt werden, daß die Fläche für $s = 0$ durch eine Anzahl von Punkten der Randlinie des Querschnitts hindurchgeht. Die Punkte müssen ziemlich eng aneinander liegen, da sonst leicht ein Umbrechen der Kurve $s = 0$ zwischen den Punkten stattfindet.

Bei dem gewählten Beispiel (Abb. 7), in welchem die Einziehung d des Querschnitts zwischen den Kreuzarmen $^1/_2$ des größten Durchmessers h beträgt, ist

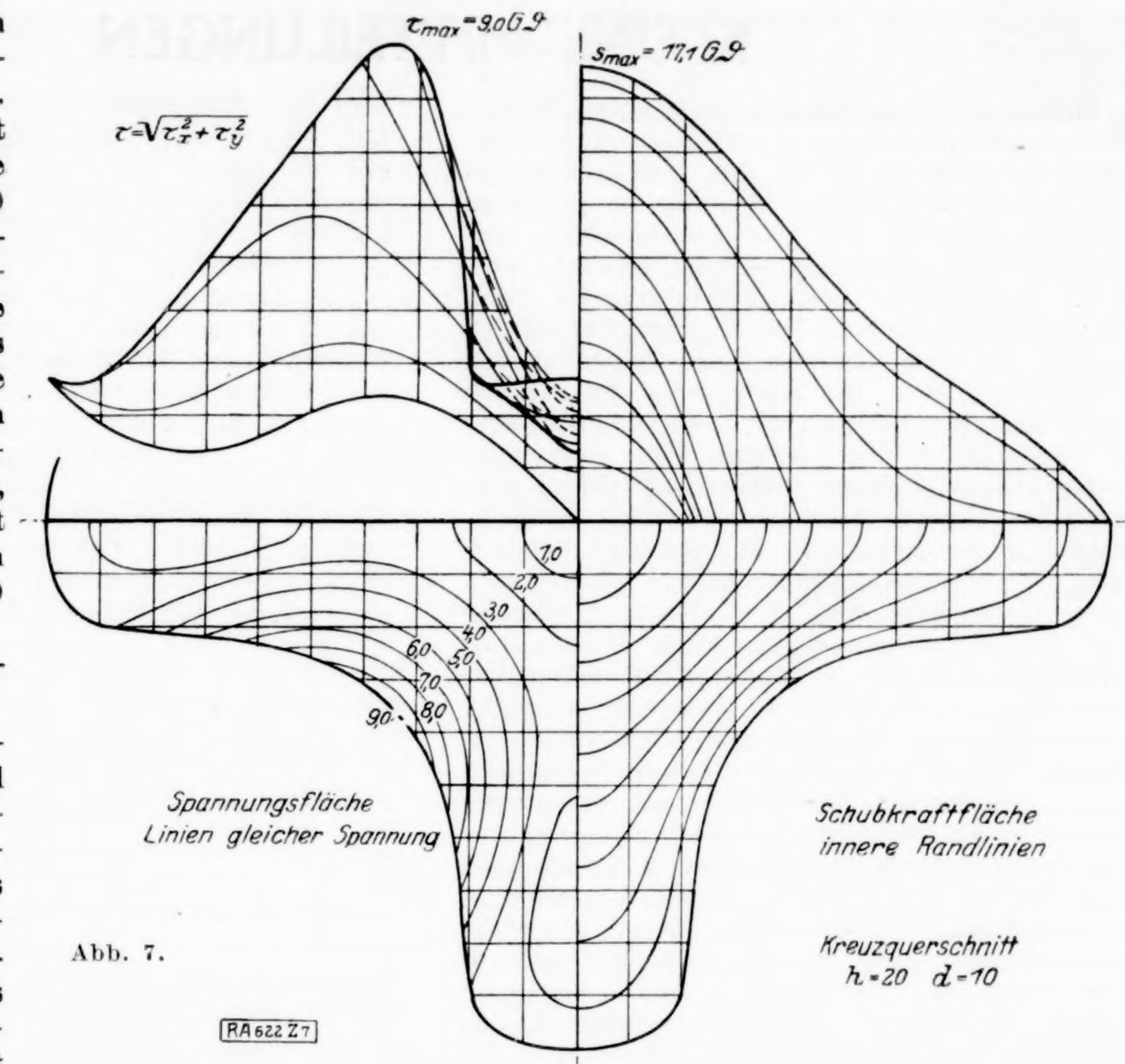


Abb. 7.

$$s = G\,\vartheta\,\frac{h^2}{4}\left(0{,}171 - 0{,}5\left(\frac{2\nu}{h}\right)^2 + 0{,}681\left(\frac{2\nu}{h}\right)^4\cos 4\,\varphi - 0{,}815\left(\frac{2\nu}{h}\right)^8\cos 8\,\varphi\right.$$
$$\left. + 1{,}068\left(\frac{2\nu}{h}\right)^{12}\cos 12\,\varphi - 0{,}950\left(\frac{2\nu}{h}\right)^{16}\cos 16\,\varphi + 0{,}345\left(\frac{2\nu}{h}\right)^{20}\cos 20\,\varphi\right).$$

Die größte Spannung liegt wiederum am Endpunkt des kleinsten Durchmessers und beträgt

$$\tau_{\max} = 0{,}450\; G\,\vartheta\,h;$$

die Spannung am Ende eines Kreuzarmes ist

$$\tau' = 0{,}130\; G\,\vartheta\,h.$$

Das Drehmoment ergibt sich zu

$$M = 0{,}0144\; G\,\vartheta\,h^4,$$

woraus

$$\tau_{\max} = 31{,}3 \cdot \frac{M}{h^3}$$

folgt.

Zum Vergleich werde ein Querschnitt herangezogen, der aus zwei gekreuzten Flacheisen mit dem Seitenverhältnis $\frac{h}{b} = 4$ besteht. Es ist

$$\tau_{\max} = 1{,}06 \cdot G\,\vartheta \cdot \frac{b\,h^2}{b^2+h^2} = 0{,}25\; G\,\vartheta\,h, \quad M = 2 \cdot \frac{G\,\vartheta}{3{,}33} \cdot \frac{b^3\,h^3}{b^2+h^2} = 0{,}0089\; G\,\vartheta\,h^4, \quad \tau_{\max} = 28{,}2\,\frac{M}{h^3}.$$

Wenn es sich also darum handelt, die Abhängigkeit der größten Spannung vom Drehmoment zu ermitteln, so liefert der Ersatz des Kreuzeisens durch zwei Flacheisen leidlich brauchbare Ergebnisse; dagegen ist bei gegebenem Verdrehungewinkel sowohl die größte Spannung wie das Drehmoment um rund 80 vH größer bei dem Kreuzeisen als bei dem doppelten Flacheisen. Umgekehrt ist der Verdrehungswinkel des Kreuzeisens bei gegebenem Drehmoment um rund 45 vH kleiner als bei den ersetzenden Flacheisen; der Kreuzquerschnitt ist also steifer. 622

KLEINE MITTEILUNGEN

Ueber die Voreilung beim Walzen.[1]) Eine theoretische Behandlung bildsamer Formänderungsvorgänge wird für den praktischen Betrieb stets nur dann Bedeutung zu gewinnen vermögen, wenn die Gesetzmäßigkeiten auf mathematisch einfachste Formen gebracht werden. Graphischen Lösungsverfahren ist dabei vor mathematischen immer der Vorzug zu geben, da dem Betriebsmanne seiner ganzen Einstellung nach die Anschauung mehr sagen wird als eine Formel. Drängen so die Anforderungen des Betriebes nach einer möglichst vereinfachsten Behandlung der Formgebungsprobleme, so machen die Bedingungen des Betriebes eine genauere Behandlung von Formänderungsvorgängen meist illusorisch. Genannt seien von solchen Einflüssen bei der Warmformgebung durch Walzen nur die wohl stets vorhandene ungleichmäßige Erwärmung des Walzgutes und die ungleiche Wärmetönung, die durch Wärmestrahlung, durch Wärmeleitung zur Walzenoberfläche und durch Umsetzung der Walzarbeit in Wärme hervorgerufen sein kann, und die die Annahme gleicher Formänderungsfestigkeit über den ganzen Walzspalt bereits als eigentlich unzulässig kennzeichnet. Es sei ferner darauf aufmerksam gemacht, daß das Mohr'sche Gesetz in der Form der Gleichung 2) auch nur eine grobe Annäherung an die Spannungs-Formänderungskurve bedeutet. Schließlich sind die Fragen der Verfestigung, des Einflusses der Formänderungsgeschwindigkeit, der Größe der Walzreibung usw. noch so wenig experimentell geklärt, daß vom Standpunkt des Betriebsmannes häufig eine genauere Rechnungsmethode sinnlos ist, sobald die Genauigkeit auf Kosten der Einfachheit erzielt wird. Im Folgenden sei nun eine der Forderung der Einfachheit und der graphischen Darstellbarkeit in erster Linie genügende Lösung des Voreilungsproblems zu geben versucht.

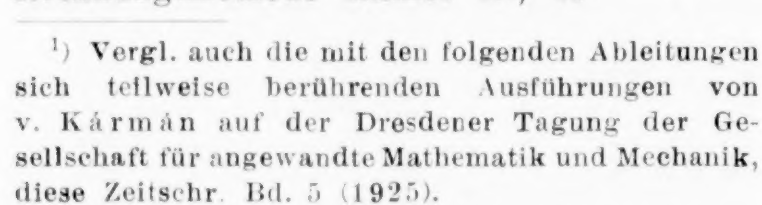
Die Breitung ist bei den meisten Walzvorgängen so geringfügig, daß man sie bei der Untersuchung der Voreilung fast stets vernachlässigen kann. Die Untersuchung sei deshalb auf das ebene Problem beschränkt. Ersetzt man die Spannungen über einen Querschnitt senkrecht zur Hauptachse des Walzgutes in erster Annäherung durch ein gleichmäßiges Kraftfeld (p) und läßt die Formänderung unter dem Einfluß dieses Kraftfeldes, das sich infolge der Neigung der Walzenoberfläche (Neigungswinkel φ) und der Reibung zwischen Walzgut und Walze (Reibungskoeffizient μ) in seiner Stärke ändert, und eines senkrecht dazu stehenden Kraftfeldes (q) vor sich gehen, so ergibt sich unter Benutzung der aus Abb. 1 ersichtlichen Beziehungen der Ansatz

$$\frac{dp}{dx} = \frac{q}{h}(\operatorname{tg}\varphi - \mu) \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Führen wir als Plastizitätsbedingung

$$q - p = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

(k = Formänderungsfestigkeit) ein und setzen wir $\mu = \operatorname{tg}\varrho$ (ϱ = Reibungswinkel), so erhält obiger Ansatz die Form


[1]) Vergl. auch die mit den folgenden Ableitungen sich teilweise berührenden Ausführungen von v. Kármán auf der Dresdener Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik, diese Zeitschr. Bd. 5 (1925).

Der Herausgeber.

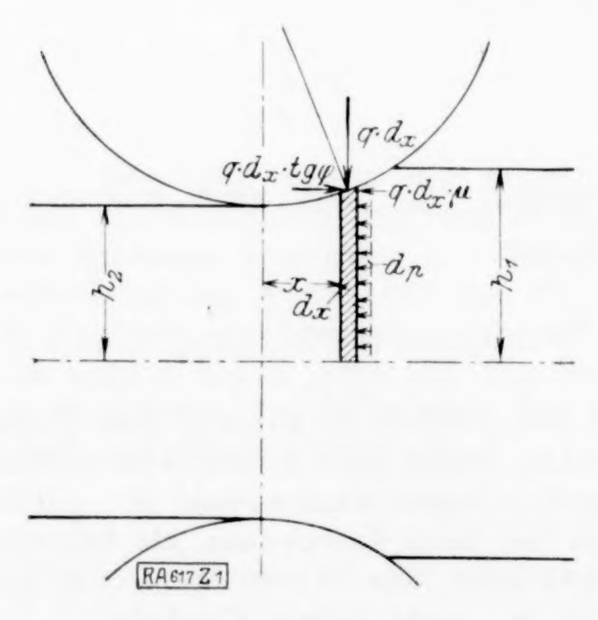


Abb. 1.

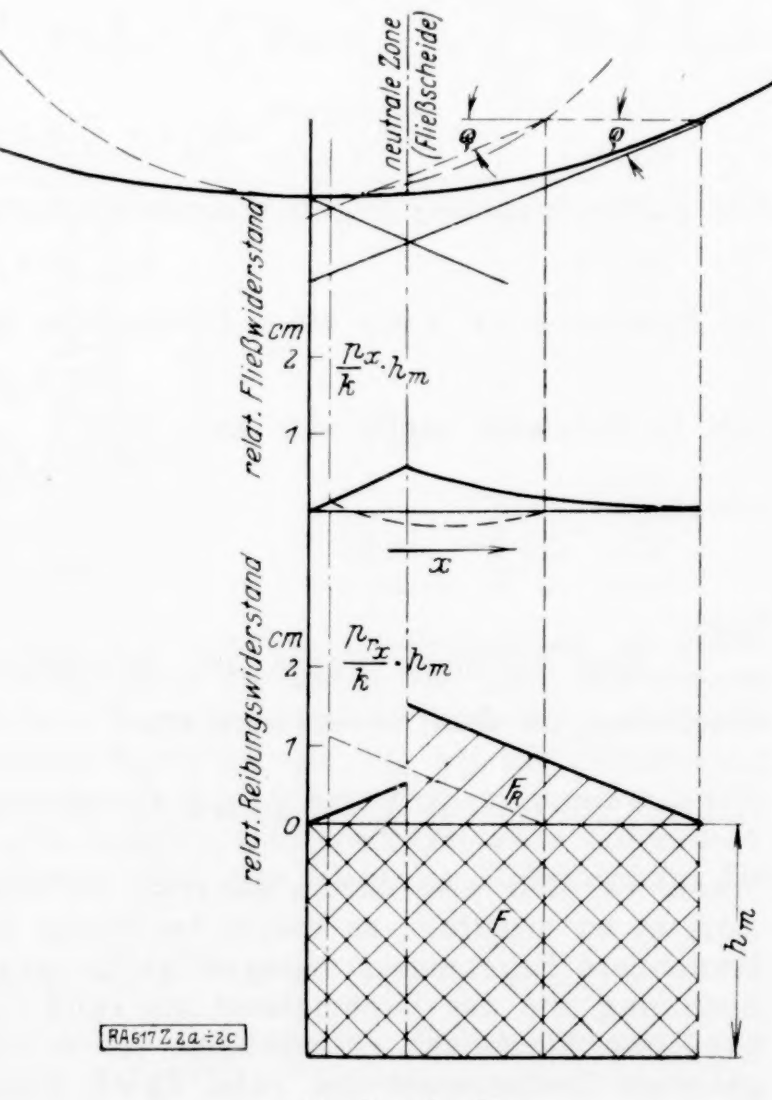


Abb. 2a bis 2c.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{(k+p)}{h}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varrho) \quad . \quad . \quad (3).$$

Praktisch kommen Abnahmen von über 30 vH äußerst selten vor, und der Fließwiderstand (p) im Walzspalt wird immer klein im Verhältnis zur Formänderungsfestigkeit (k) bleiben. Die Berücksichtigung dieses Umstandes erlaubt es uns angenähert in Gl. 3) $h = \sim$ konst. $= h_m = \frac{h_1 + h_2}{2}$ und $k + p = \sim k$ zu setzen und die Gleichgewichtsbedingung gemäß Gl. 3) für den Walzvorgang auf die Form zu bringen

$$\frac{dp}{dx} = \frac{k}{h_m}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varrho) \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Der Fließwiderstand p_x ergibt sich daraus zu

$$p_x = \sim \frac{k}{h_m}\int dx\,(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varrho) \quad . \quad . \quad (5).$$

In dieser Form ist die Gleichung graphisch integrierbar. Da p an den beiden Enden des mit dem Walzgut in Berührung befindlichen Walzspaltes $= 0$ sein muß und $\operatorname{tg}\varrho$ je nach der Fließrichtung das Vorzeichen wechselt, erhält man ein Bild des an jeder Stelle für die Höhe 1 und die Formänderungsfestigkeit 1 geltenden relativen Fließwiderstandes, indem man gemäß Abb. 2 den Reibungswinkel ϱ in den beiden Endebenen des Walzspaltes am Walzenumfange anträgt. Der senkrecht zur Walzebene gemessene Abstand zwischen der Walzenoberfläche und dem freien Schenkel dieses Winkels bezeichnet alsdann den relativen Fließwiderstand. In Abb. 2b ist der Verlauf dieser Größe im rechtwinkligen Koordinatensystem wiedergegeben.

Da das Abfließen des von den Walzen verdrängten Materials stets in Richtung des geringsten Fließwiderstandes vor sich geht, bezeichnet der Schnittpunkt der beiden Widerstandskurven die neutrale Zone, in welcher sich Walzgut und Walzenumfang mit gleicher Geschwindigkeit bewegen, oder die Fließscheide[1]), welche die Gebiete entgegengesetzten Materialflusses trennt.

Das abfließende Material leistet während des Durchgangs durch den Walzspalt Reibungsarbeit, welche für sich allein betrachtet einen relativen Fließwiderstand gemäß Abb. 2c erzeugen würde. Es ergibt sich für diesen Reibungswiderstand (p_r) in Analogie zu Gl. 5) die Formel

$$p_{r_x} = \sim -\frac{k}{h_m}\int dx\,\operatorname{tg}\varrho \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Die graphische Lösung für den relativen Reibungswiderstand ist aus Abb. 2c ohne weiteres ersichtlich. Die Antragung von h_m und die Ausplanimetierung der Flächen ergibt weiterhin den Wirkungsgrad (η) des Walzprozesses als Verhältnis der doppelt schraffierten Fläche (F) zur ingesamt schraffierten Fläche $(F + F_R)$.

Der günstige Einfluß kleiner Walzendurchmesser auf diesen Wirkungsgrad geht aus Abb. 2 klar hervor. In Wirklichkeit verhalten sich solche Walzen noch verhältnismäßig vorteilhafter, wenn man ihre stärkere Streckwirkung berücksichtigt, da die Breitarbeit meist einen Energieverlust bedeutet. Praktisch ist der Verkleinerung des Walzendurchmessers dadurch ein Ziel gesetzt, daß einmal die Walze gegenüber den auftretenden Beanspruchungen eine genügende Widerstandsfähigkeit besitzen muß, dann aber auch, um das Ergreifen des Walzgutes zu ermöglichen, der Walzwinkel die Größe des Reibwinkels nicht überschreiten **darf**[2]).

Die Kenntnis der Lage der neutralen Zone und damit des Fließzonenverhältnisses $n = \frac{a_e}{a_a}$ erlaubt schließlich auch die Berechnung der relativen Voreilung v des Walzgutes gegenüber

[1]) Vergl. Preußler »Zur Frage der bildsamen Formänderung«, Bericht 36 des Walzwerksausschusses des Vereins deutscher Eisenhüttenleute.

[2]) Wie aus Abb. 4 hervorgeht, ist ein »Durchziehen« des einmal gefaßten Walzgutes noch möglich, solange der Walzwinkel kleiner als der doppelte Reibwinkel ist.

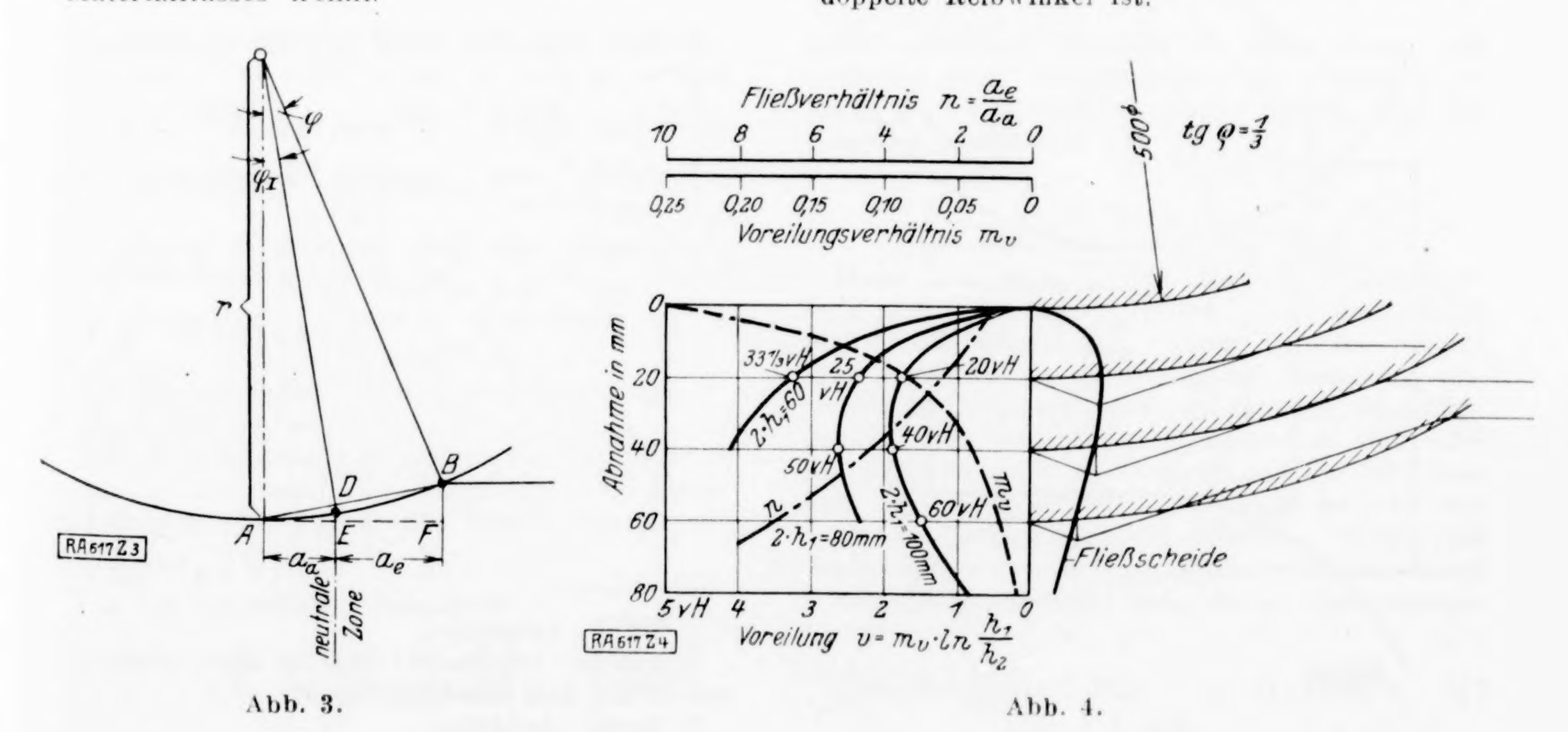


Abb. 3.

Abb. 4.

dem Walzenumfang. Das Voreilungsverhältnis, d. h. der Wert

$$m_v = \frac{\text{nach vorwärts verdrängtes Volumen}}{\text{insgesamt verdrängtes Volumen}}$$

berechnet sich gemäß Abb. 3 angenähert zu

$$m_v = \frac{DE}{BF} = \frac{1 \cdot}{(n+1)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Die relative Voreilung (v) kann alsdann durch Multiplikation dieser Ziffer mit der die spez. Volumenverdrängung charakterisierenden Größe ln h^1/h^2 ermittelt werden zu

$$v = m_v \ln \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \ln \frac{h_1}{h_2} \quad . \quad . \quad (8).$$

In Abb. 4 ist diese Berechnung für eine 500er Walzenstraße durchgeführt. Wie wir sehen, vermag die Voreilung praktisch 3—4 vH nicht zu überschreiten.

Es dürfte nicht schwer fallen, für die geschilderten Zusammenhänge genauere graphische Lösungen beizubringen. Es ist hiervon Abstand genommen worden, da die aufgestellten Beziehungen in den praktisch vorkommenden Fällen fast stets eine quantitativ genügend genaue Berechnung gestatten, wo dies aber nicht der Fall ist, doch wenigstens die Möglichkeit bieten, die in Frage kommenden Verhältnisse qualitativ zu überblicken.

Düsseldorf. E. Siebel. 617

Zur Theorie des Walzvorganges. In einer früheren Mitteilung über das Voreilen beim Walzen (Diese Zeitschr. 5, 1925, Seite 78) gab ich der Meinung Ausdruck, daß eine rechnerische quantitative Behandlung dieses Problems wohl ausgeschlossen wäre, wegen der Unsicherheit betreffend Zusammenhang der maßgebenden Größen. Daß ich eine damals schon von mir aufgestellte, auf Annahmen gegründete Rechnung im Folgenden jetzt doch veröffentliche, geschieht auf Anregung des Hrn. von Kármán; hoffentlich veranlassen die Ergebnisse der Rechnung doch noch zur weiteren experimentellen Forschung.

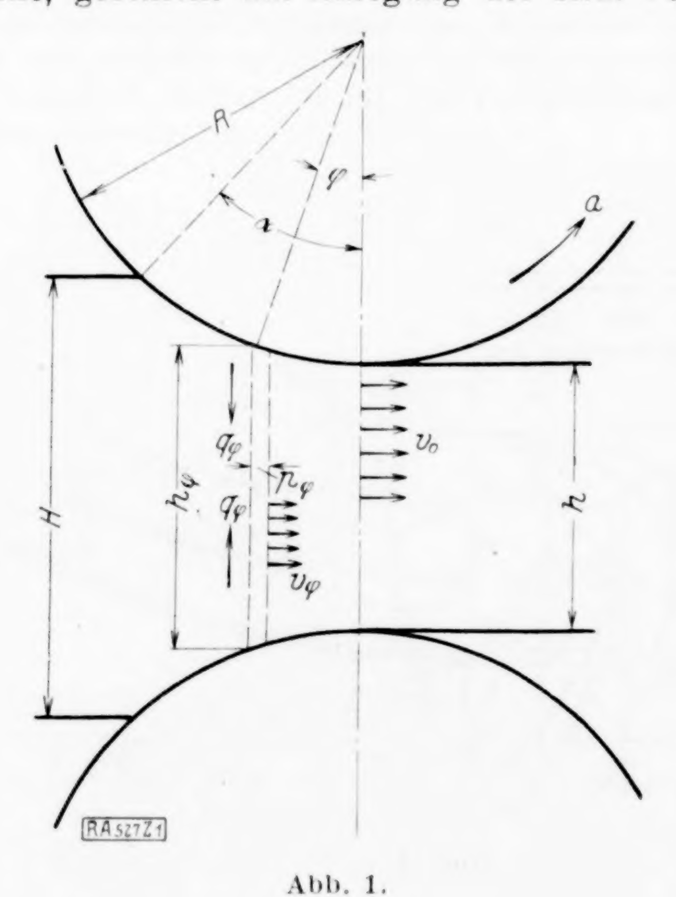


Abb. 1.

Von der Breitung wird abgesehen und das Problem als eben betrachtet. Mit Bezug auf Abb. 1 nehmen wir an:

$$q_\varphi - p_\varphi = K.$$

Das K wird wahrscheinlich etwa nach

$$K = K_0 - S \frac{d h_\varphi}{h_\varphi \, dt}$$

zusammenhängen mit der Plastizitätsgrenze und mit der Formänderungsgeschwindigkeit. In der Annahme, daß wir sehr heißes Walzgut betrachten, vernachlässigen wir K_0 und setzen somit

$$q_\varphi - p_\varphi = - S \frac{d h_\varphi}{h_\varphi \, dt} \cdot \;^{1)}$$

Zwischen α und ψ wird das Walzgut eingezogen, zwischen ψ und 0 gehemmt. Von α gegen ψ und von 0 gegen ψ nimmt p zu. Der Winkel ψ findet sich daraus und aus der Gleichgewichtsbedingung: Werden die Beschleunigungskräfte vernachlässigt, so gilt Abb. 2 für das Gebiet 0—ψ, Abb. 2b für das Gebiet ψ—α. Die Gleichungen werden:

$$0 - \psi: \frac{d(p_\varphi h_\varphi)}{d\varphi} = 2\,NR \sin\varphi + 2\,f NR \cos\varphi \;^{2)}$$

$$\psi - \alpha: \frac{d(p_\varphi h_\varphi)}{d\varphi} = 2\,NR \sin\varphi - 2\,f NR \cos\varphi.$$

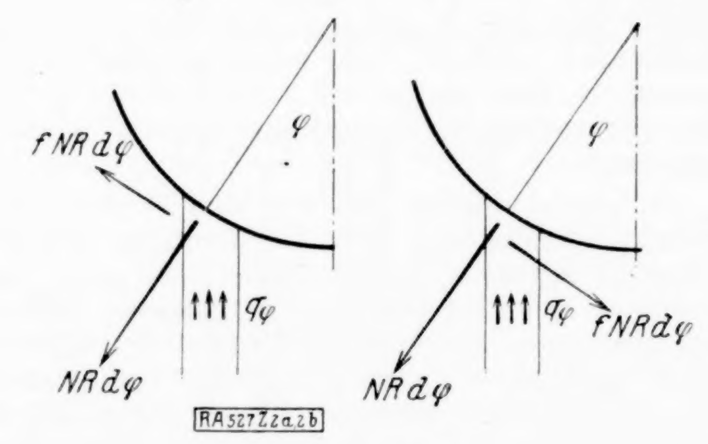


Abb. 2a und 2b.

Nimmt man eine gleiche Horizontalgeschwindigkeit an über die ganze Höhe $h\varphi$ [3]), setzt man $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, $\varphi = \sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi$ und $R = nh$, so ergibt eine einfache Substitution mit $v_0 h = K$:

$$0 - \psi: \frac{dp_\varphi}{d\varphi} = \frac{n}{(1+n\varphi^2)(1-f\varphi)} \left\{ f p_\varphi (2+\varphi^2) + \frac{4\,KS\varphi\left(f + \varphi - \frac{f\varphi^2}{2}\right)}{h^2(1+n\varphi^2)^2} \right\}.$$

$$\psi - \alpha: \frac{dp_\varphi}{d\varphi} = \frac{n}{(1+n\varphi^2)(1+f\varphi)} \left\{ -f p_\varphi (2+\varphi^2) + \frac{4\,KS\varphi\left(-f + \varphi + \frac{f\varphi^2}{2}\right)}{h^2(1+n\varphi^2)^4} \right\}.$$

[1]) Erste »Annahme«.

[2]) Zweite »Annahme«. Wie ist das f abhängig von Druck und Geschwindigkeit?

[3]) Dritte »Annahme«.

Die Arbeit, am Walzenumfang verbraucht, beträgt pro Sekunde für eine Walze:

$$a\left\{\int_{\psi}^{\alpha} f\,N\,R\,d\varphi - \int_{0}^{\psi} f\,N\,R\,d\varphi\right\},$$

woraus für beide Walzen:

$$2\,a\,f\,n\left\{\int_{\psi}^{\alpha}\frac{p_\varphi\,h^2\,(1+n\varphi^2)^2+2\,K\,S\,\varphi}{h\,(1+n\varphi^2)^2\,(1+f\varphi)}\,d\varphi\right.$$

$$\left.-\int_{0}^{\psi}\frac{p_\varphi\,h^2\,(1+n\varphi^2)^2+2\,K\,S\,\varphi}{h\,(1+n\varphi^2)^2\,(1-f\varphi)}\,d\varphi\right\}.$$

Wäre das Material in der Längsrichtung gänzlich frei (p also Null), so wäre pro Sekunde eine »Nutzarbeit« zu leisten von

$$\int_{0}^{R\sin\alpha} S\,\frac{d\,h_\varphi}{h_\varphi\,d\,t}\,d\,x\,\frac{d\,h\,\varphi}{d\,t} \quad\text{oder}\quad \frac{4\,S\,n\,K^2}{h^2}\int_{0}^{\alpha}\frac{\varphi^2\,(1-\varphi^2/2)}{(1+n\varphi^2)^3}\,d\varphi.$$

$n = R/h$	Wirkungs-grad	Berührungs-dauer	Breitung
2	0,935	$9/a$	$0{,}355\,b\,S/S_1$
5	0,756	$14{,}1/a$	$0{,}437\,b\,S/S_1$

Daß die »Nutzarbeit« bei dem kleineren Walzendurchmesser erheblich größer ist, rührt davon her, daß die Bogenlänge bei gleichem H und h hier viel kleiner ist und die Berührungsdauer also viel kürzer; weil nach unserer Annahme die Kraft proportional der Formänderungsgeschwindigkeit ist, bedingt der kleinere Durchmesser also größere Kräfte. Im Zusammenhang mit der erheblich größeren Voreilung (also Reibungsverluste am Walzenumfang) ist der Wirkungsgrad beim größeren Walzendurchmesser merklich schlechter.

Daß die Drücke p beim kleinen Walzendurchmesser erheblich niedriger bleiben wie beim großen, weckt die Erwartung, daß die Breitung auch geringer bleibt beim kleinen n.

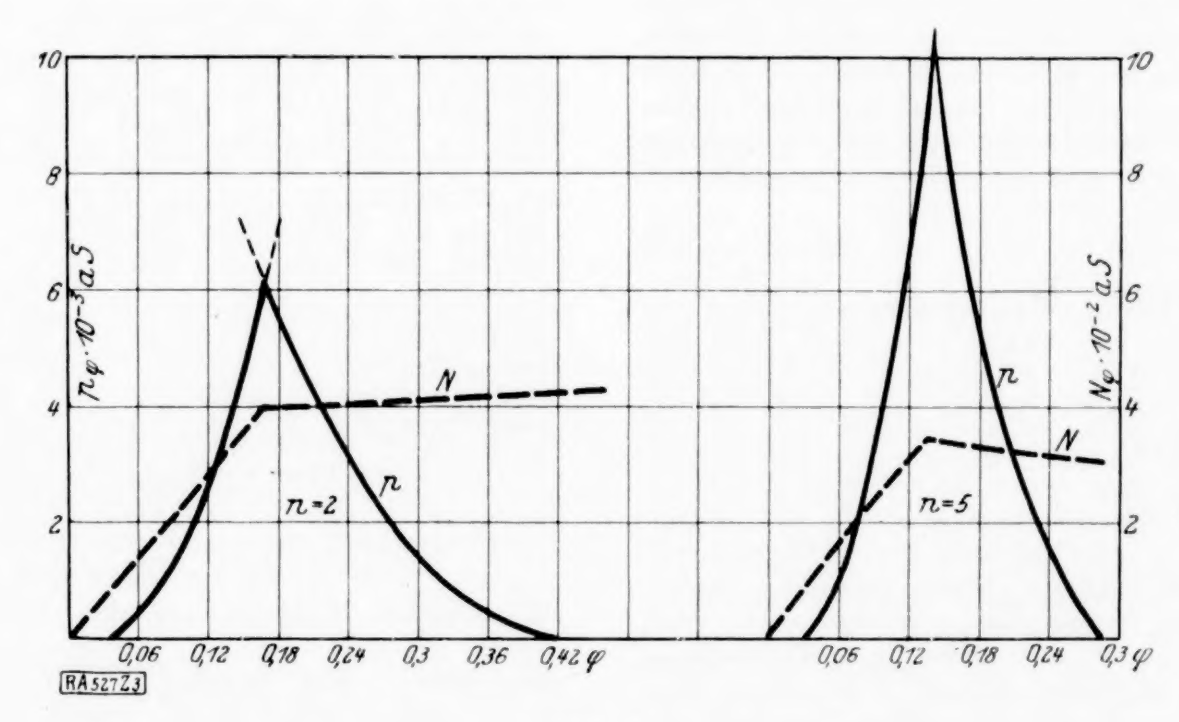


Abb. 3.

Der Druck auf den Walzen N ergibt sich als:

$$0-\psi:\quad N=\frac{1}{1-f\varphi}\left\{p\varphi+S\,\frac{2\,K\,\varphi}{h^2\,(1+n\varphi^2)^2}\right\}.$$

$$\psi-\alpha:\quad N=\frac{1}{1+f\varphi}\left\{p\varphi+S\,\frac{2\,K\,\varphi}{h^2\,(1+n\varphi^2)^2}\right\}.$$

Sämtliche Ergebnisse sind nun rechnerisch bestimmt worden für:

$$h = 10\text{ cm},\quad f = 0{,}5,\quad H = 14\text{ cm}$$
und n 2 bzw. 5.

Das p_φ ist von $\alpha = 0$ bzw. $\alpha = \alpha$ aus, schrittweise bestimmt worden.

Der Schnittpunkt der beiden Kurven (Abb. 3) ergibt ψ und damit die Voreilung. Die Rechnungsergebnisse sind in der Tabelle zusammengestellt:

$n = R/h$	Voreilung	Nutzarbeit	Verbrauchte Arbeit
2	4,05 vH	$0{,}160\ a^2S$	$0{,}171\ a^2S$
5	8,6 »	$0{,}0935\ a^2S$	$0{,}124\ a^2S$

Einen gewissen Einblick in diese Frage, die übrigens zum dreidimensionalen Problem gehört, gibt vielleicht doch der Ansatz, daß die Breitung annähernd

$$\frac{d\,b}{b\,d\,t}\,S_1 = p_\varphi + q_\varphi\,.$$

Diese Gleichung ergibt für die Gesamtbreitung Δb, vorausgesetzt, daß diese geringfügig bleibt, die Werte aus obiger Tabelle. Nimmt man die Breitung mit in die Betrachtungen auf, so ist zu beachten, daß die inneren Spannungen in drei Richtungen veränderlich sind, daß die Reibung auch quer wirkt und die Richtung der Reibungskraft also abhängig ist von der relativen Geschwindigkeit zwischen Walze und Walzgut, welche sich zusammensetzt aus einer Umfangskomponente und einer Querkomponente.

Den Haag, Mai 1925. D. Dresden. 527

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die Sortiment-Abteilung des VDI-Verlages, Berlin SW 19, Beuthstraße 7, zu beziehen.)

R. **THUN**, Ingenieur. Der Film in der Technik. Mit 103 Abb., 1 Tafel und 40 Aufstellungen. VdI-Verlag G. m. b. H., Berlin 1925. XX + 286 S.

Zusammenfassung der Grundlagen der technischen Kinematographie, insbesondere der psychologischen und physiologischen, der photochemischen, der optischen und mechanischen Grundlagen, weiter die Anwendungen des Films als Forschungs- und Anschauungsmittel, endlich die systematische Besprechung der Arbeiten, die mit der Aufnahme von Filmen verbunden sind. Seitdem man begonnen hat, sich wissenschaftlich mit dem Kinowesen als einem Zweige der modernen Technik zu beschäftigen, hat man erkannt, welche Fülle von Problemen aller Art darin liegen, so daß es sich wohl verlohnt, eine Gesamtdarstellung zu versuchen. Eine solche, allgemein verständlich angelegte, bringt das vorliegende Werk, das als sehr gelungen bezeichnet werden kann, und das vermöge seiner zahlreichen und guten Abbildungen und Diagramme einen äußerst lehrreichen Ueberblick über dieses Gebiet enthält.

Prag. T. Pöschl. 626

CARL **MITTAG**, Oberingenieur. Der spezifische Mahlwiderstand. Ein Weg zur Erforschung der Arbeitsvorgänge in Zerkleinerungs-Maschinen. VdI-Verlag G. m. b. H., Berlin 1925. 35 S. Preis 2,50 M.

Es handelt sich um die rationelle Bestimmung der Leistungsfähigkeit und der Beanspruchung von Zerkleinerungsmaschinen, wie solche für Mineralien, Erze, Gesteine, Kohle und chemische Erzeugnisse verschiedenster Art seit langem in großer Zahl in Verwendung stehen. Das Büchlein enthält »ein neues Verfahren zur einheitlichen Ermittlung des Arbeitsaufwandes der Zerkleinerung, das eine wissenschaftliche Grundlage zur weiteren Erforschung der physikalischen Vorgänge auf diesem noch ungenügend ergründeten Sondergebiet der Technik bilden möge«. Als neuer grundlegender Begriff wird hierzu der »spezifische Mahlwiderstand« eingeführt, als jene Arbeit, die nötig ist, um die Gewichtseinheit eines Stoffes bis auf einen bestimmten Feinheitsgrad zu zerkleinern. Der Begriff ist ähnlich definiert wie die spezifische Wärme. Aufnahme von »Mahlkurven«, Anwendungen.

Prag. T. Pöschl. 627

Dr. phil. OTTO **KNOPF**, o. ö. Professor der Astronomie an der Universität Jena. Mathematische Himmelskunde. Mit 30 Fig. im Text. Mathematisch-Physikalische Bibliothek 63. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1925. 48 S. Preis 1 M.

Es ist nicht unnütz, wenn eine kleine mathematische Himmelskunde, für weitere der Mathematik nicht ganz unkundige Kreise bestimmt, einmal von einem Astronomen geschrieben wird. Der Richtigkeit aller textlichen und numerischen Angaben ist der Leser sicher. Und da die Darstellung gleich dem Gegenstand einfach, die Anordnung bewährt ist, wird sich das Büchlein zur Einführung bequemer erweisen, als eines der zahlreichen mathematisch-geographischen Lehrbücher bemerkenswerten Umfanges. Die Figur der Erde erfährt mit Recht keine Behandlung; in § 21 b wäre die ausdrückliche Hervorhebung der Annahme der Kugelgestalt erwünscht; denn S. 46 heißt es, die Parallaxe ändere nur die Höhe, nicht das Azimut. Von S. 45 an lastet der Zwang des zugewiesenen Raumes auf den letzten §§.

Das wohlfeile Papier, auf dem die »math.-phys. Bibl.« jetzt gedruckt wird, erlaubte es dem Verlage sehr wohl, unter Beibehaltung des Preises die Hefte mit einem dickeren Kartonumschlag zu versehen. Wie es einst war.

Kiel. C. Wirtz. 641

NACHRICHTEN

Hugo Sellentin †. Unter dem Schatten der gewaltigen Ereignisse des Weltkrieges ist der Tod des Schiffbauingenieurs Hugo Sellentin nur von wenigen, ihm besonders nahestehenden Fachgenossen, beachtet worden. Die Veröffentlichung einer nachgelassenen Arbeit in dem vorliegenden Heft mag die Veranlassung bilden, seiner kurz zu gedenken.

Im Jahre 1869 geboren, absolvierte Sellentin in sehr jungen Jahren und in bemerkenswert kurzem Zeitraum mit Auszeichnung die Technische Hochschule in Berlin. Gleichzeitig war er als Konstrukteur in der Praxis tätig, womit er schon damals den Beweis ungewöhnlicher Begabung und Arbeitskraft lieferte. Nach Verlassen der Hochschule arbeitete er bis zum Jahre 1899 bei den Werften Joh. L. Meyer in Papenburg, Germaniawerft in Kiel und Schichauwerke in Danzig als Konstrukteur und Abteilungsvorstand. In allen diesen Stellungen zeigte er gleichmäßige ungewöhnliche Fähigkeiten im Entwerfen von Schiffsbauten, in der Ausarbeitung von Einzelheiten und in der mathematischen Behandlung theoretischer Fragen. Ohne lehrhaft zu sein, hatte er eine große Gabe, durch seine eigenen Leistungen und sein Beispiel nachhaltig auf alle zu wirken, die mit ihm in nähere Berührung kamen. Deren sind viele; und so verdankt ihm eine lange Reihe von deutschen Schiffbauingenieuren außerordentlich viel.

Leider besitzen wir kein größeres Werk aus Sellentins Feder; jedoch zeigen außer der nachgelassenen Arbeit, welche hier ver-

öffentlicht wird, viele kleinere Arbeiten im »Schiffbau«, dessen Redakteur er längere Zeit war, und in anderen Zeitschriften von seiner Fähigkeit, schwierige Probleme in eigenartiger und geistreicher Weise zu lösen.

Wenn Sellentin auch außerordentlich gern in der Praxis tätig war, so wurde er doch durch seine Fähigkeiten und Neigungen auf den Lehrberuf hingewiesen. 1899 übernahm er einen Posten als Oberlehrer bei der Königl. Höheren Maschinenbauschule in Altona. 1903 wurde er Direktor der neuerrichteten Königl. Höheren Schiff- und Maschinenbauschule in Kiel. Hier bewies er, außer den schon erwähnten Fähigkeiten, große Organisationsgabe. Die Anstalt selbst, ihre Ausstattung, ihr Lehrplan, sind sein Werk. Er hat hier mit so bewunderungswürdiger Umsicht und Sachkenntnis organisiert, daß wesentliche Aenderungen sich bis heute nicht als nötig erwiesen haben.

1907 wurde Sellentin Regierungs- und Gewerbeschulrat für das gewerbliche Schulwesen in Arnsberg. 1911 siedelte er in derselben Eigenschaft für die drei Regierungsbezirke Stettin, Köslin und Stralsund nach Stettin über. Hier starb er am 9. Juli 1917, tief betrauert von seinen Fachgenossen und näheren Freunden.

Sellentin war eine sich wohl ihres Wertes bewußte Persönlichkeit; dennoch drängte er sich niemals vor. Von sich selbst das Höchste verlangend, forderte er auch von seinen Mitarbeitern und Untergebenen und Schülern viel. Unberechtigten Ansprüchen konnte er gelegentlich sehr energisch entgegentreten. Eine frohe Natur, liebte er Geselligkeit in kleineren Kreisen und wirkte auch hier durch seine Liebenswürdigkeit und durch sein erstaunliches Wissen auf allen Gebieten.

H. Techel. 623

Karl Doehlemann †. Am 22. März d. Js. starb in München im 62. Lebensjahr der ordentliche Professor der darstellenden Geometrie an der technischen Hochschule Dr. Karl Doehlemann. Er war 1864 in Freising in Bayern geboren, studierte in München, promovierte an der Münchener Universität und habilitierte sich an dieser 1891. Seit 1912 war er als Nachfolger von L. Burmester an der technischen Hochschule tätig. Seine wissenschaftlichen Arbeiten galten vorwiegend dem Gebiete der Geometrie. Ein zweibändiges Werk über geometrische Transformationen rührt von ihm her. Sehr bekannt sind die von ihm verfaßten Bändchen über projektive Geometrie und über Perspektive in der Sammlung Göschen. In unserer Zeitschrift führte Doehlemann das Referat über die Neuerscheinungen der darstellenden Geometrie. Persönliches Interesse nahm er in hohem Maße an den Werken der bildenden Künste und versuchte sich auch in theoretischen Arbeiten über ihren inneren Zusammenhang und über die formalen Gesetze der Malerei.

Berliner Ortsgruppe der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. Am 29. Januar hat im Institut für angewandte Mathematik der Universität die konstituierende Sitzung der Ortsgruppe stattgefunden. Der bisherige Vorsitzende des Vortragsausschusses für technische Mechanik im Berliner Bezirksverein deutscher Ingenieure, Hr. Prof. H. Reißner, wurde zum Vorsitzenden der Ortsgruppe gewählt. Großes und lebhaftes Interesse fand der Vortrag von Hrn. Prof. R. Rüdenberg über Aussendung und Empfang elektrischer Wellen. Der Vortragende zeigte, wie man mit verhältnismäßig einfachen mathematischen Hilfsmitteln einen Einblick in alle praktisch belangreichen Fragen der Wellenübertragung gewinnen kann. Eingehende Aussprache schloß sich an den Vortrag an.

Der zweite Vortragsabend fand am 26. Februar am gleichen Orte statt. Es sprach Hr. Prof. Hamel-Charlottenburg über die Mechanik der steifen Seile. Er gab eine Theorie der Seile, die von dem in der Mechanik der zähen Flüssigkeit üblichen Reibungsansatz ausgeht. Der Vortrag wird in dieser Zeitschrift veröffentlicht werden. 661

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Zum Aufsatz von M. Reiner: **„Ueber die Torsion prismatischer Stäbe durch Kräfte, die auf den Mantel einwirken.** Der Ansicht des Verfassers, in seiner Abhandlung eine Erweiterung der St. Venant'schen Torsionstheorie gegeben zu haben, dürfte man kaum beistimmen können. Da der Inhalt des in Frage stehenden Artikels sich nicht viel von dem zweier früherer Arbeiten desselben Verfassers unterscheidet[1]), so möchte ich darauf hinweisen, daß ich zu diesen in einer Anmerkung einer in den Wiener Akademieberichten im Jahre 1916 erschienenen Abhandlung »Ueber den Einfluß der Einspannung auf die Torsionsbeanspruchung eines Kreiszylinders« Stellung genommen habe.

Der Ansatz von M. Reiner setzt sich aus der Ueberlagerung einer St. Venant'schen Torsionslösung und einer ebenen Spannungsverteilung zusammen. Man kann ihn ohneweiteres aus folgenden Ansatz für die Verschiebungen erhalten

$$u = \tau \frac{\partial \chi}{\partial x} - \tau_0 y z , \qquad v = \tau \frac{\partial \chi}{\partial x} + \tau_0 x z$$

$$w = \tau z \Delta^2 \chi + (\tau z + \tau_0) \Phi,$$

wobei τ und τ_0 dieselben, dem Drall entsprechenden Konstanten wie in der Bezeichnungsweise von M. Reiner, X eine biharmonische,

[1]) M. Reiner, »Ueber Torsionsbeanspruchung von Wellen«, Zeitschr. d. öst. Ing. u. Arch. Ver. 1919 H. 18 »Ueber das Auftreten von Normalspannungen bei Torsion prismatischer Stäbe«, Oest. Wochenschr. f. d. öff. Baudienst 1915.

Φ eine harmonische Funktion der beiden Veränderlichen x und y, eben die Torsionsfunktion, ist. Infolgedessen kann man prinzipiell nur eine lineare Abhängigkeit der Schubspannungen am Mantel von z erreichen und es ist die Normalspannung σ immer nur eine Funktion von x oder y allein, also in allen Querschnitten des Stabes dieselbe. Das stimmt aber mit den tatsächlichen Verhältnissen nicht überein — denn wir haben es bei den Anwendungen der Torsionstheorie doch immer mit Stäben zu tun, deren Mantel in entsprechender Entfernung von den Einspannungsstellen spannungsfrei ist — und hat auch wenig theoretische Bedeutung, da bei axialer Symmetrie, bei Drehkörpern, die Lösung nach dem Verfahren von Föppl und Timpe bei ziemlich beliebiger Abhängigkeit der Tangentialspannungen am Mantel von z angegeben werden kann.

Abweichungen von dem der gewöhnlichen Torsionslösung entsprechenden Spannungszustand, besonders das Auftreten von Normalspannungen senkrecht zum Querschnitt, werden immer nur in der Nähe der Einspannstelle zu gewärtigen sein und in der oben erwähnten Abhandlung habe ich für den Fall des Kreiszylinders gezeigt, daß solche auch theoretisch in beträchtlichem Ausmaße dort vorhanden sind, wenn man annimmt, daß die die Torsion hervorrufenden Drehmomente durch Reibungskräfte übertragen werden, die an den Berührungsflächen zwischen Einspannungskörper und Stab auftreten und die dann auch das Vorhandensein eines Normaldruckes an dem eingespannten Teil des Zylindermantels erfordern. Die Rechnung ist dort streng mathematisch für den Fall durchgeführt, daß wir eine an den Enden eingespannte Welle haben, deren Durchmesser $^1/_6$ der Länge beträgt und auf deren Ende und zwar auf je $^1/_{20}$ der gesamten Länge eine konstante Normalspannung und eine ebenfalls konstante Schubspannung wirken, welch letztere nach dem Coulomb'schen Reibungsgesetz ein bestimmten Bruchteil der Normalspannung ist. Der übrige Mantel ist spannungsfrei. Es zeigt sich, wie schon hervorgehoben, daß eine ziemlich beträchtliche von dem Normaldruck am Mantel herrührende Spannung senkrecht zum Querschnitt auftritt, die verhältnismäßig langsam mit der Entfernung von der Einspannstelle abfällt.

Wien, am 9. Jänner 1926.

Karl Wolf. 656

* * *

Erwiderung Auf die vorstehenden Bemerkungen habe ich zu erwidern:

1. Die zitierte Arbeit von Herrn Wolf aus dem Jahre 1916 habe ich erst jetzt kennen gelernt.

2. Die St. Venant'sche Torsionstheorie setzt voraus, der Mantel des tordierten Stabes sei spannungsfrei. Ich habe zuerst darauf hingewiesen, daß Versuchsanordnung und Praxis eine Lösung verlangen, bei der die tordierenden Kräfte am Mantel angreifen, und habe in meinem Aufsatz eine solche Lösung gegeben. Darin sehe ich eine Erweiterung der St. Venant'schen Theorie.

3. Die Arbeit des Herrn Wolf, die gewiß auf einem höheren theoretischen Niveau steht als meine, hat diese doch nicht überflüssig gemacht, denn

a) behandelt sie nur den Kreiszylinder und gibt zu, daß andere Querschnittsformen der mathematischen Behandlung nach dieser Methode »kaum zugänglich« sind.

b) sind die Spannungen senkrecht zum Querschnitt (σ_2), die dort abgeleitet werden, ganz anderer Art, als die von mir aufgefundenen. Und zwar rühren sie dort lediglich vom Normaldruck am Mantel her und haben keine Beziehung zu den Tangentialkräften.

4. Hingegen habe ich

a) eine Lösung für sämtliche Querschnittsformen angegeben und insbesondere für die praktisch wichtige Rechtecksform (z. B. Eisenbetonbalkonträger) explizite dargestellt,

b) nachgewiesen, daß Spannungen senkrecht zum Querschnitt auch auftreten, wenn gar kein Normaldruck am Mantel wirkt, sondern die Oberflächenkräfte überall tangential gerichtet sind.

Der Inhalt meiner in Frage stehenden Arbeit unterscheidet sich von dem meiner früheren Arbeiten eben durch das, was in § 4 (a) und (b) als seine besondere Leistung geschildert ist.

6. Es ist bekannt, daß man den Ansatz, durch den eine Aufgabe der Elastizitätstheorie gelöst wurde, nachdem dies geschehen ist, auch umgekehrt aus den Ausdrücken für die Verschiebungskomponenten erhalten kann.

7. Es trifft nur höchst selten zu, daß eine Aufgabe der Elastizitätstheorie so weit gelöst werden kann, daß die Grenzbedingungen genau mit den tatsächlichen Verhältnissen übereinstimmen. Auch Herr Wolf muß seinen Zylinder »nach beiden Seiten ins Unendliche« sich erstrecken lassen. Mir kam es auf die ungünstigsten Spannungswerte, zum Zwecke der Dimensionierung des Stabes, an und wenn der Mantel in entsprechender Entfernung von den Einspannungsstellen spannungsfrei ist, so macht dies die Situation nicht ungünstiger. Ich nehme dann an, daß die von mir errechneten Spannungen σ_2 im »spannungslosen« Teil rasch auf Null herabsinken.

8. Auch die Lösungen von Föppl und Timpe haben meine Arbeit nicht überflüssig gemacht. Sie beziehen sich auf Drehkörper und setzen axiale Symmetrie voraus.

Jerusalem, am 27. Januar 1926.

Markus Reiner. 656

(Redaktionsschluß 25. März 1926.)

Für die Schriftleitung verantwortl.: Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 52. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.